Hr. stud. mag. A. A. Christensen venskabeligst fra Forfatteren.

GRUNDPRINCIPER

FOR

DEN INFINITESIMALE DESCRIPTIVGEOMETRI

MED ANVENDELSER PAA

LÆREN OM VARIABLE FIGURER.

AFHANDLING FOR DEN PHILOSOPHISKE DOCTORGRAD

AF

JOHANNES PETERSEN

CAND. MAG.

KJØBENHAVN.

JUL. GJELLERUPS BOGHANDEL.

S. L. MØLLERS BOGTRYKKERI.

1897.

Forsvaret finder Sted Onsdagen d. 3. Marts 1897 Kl. 10
i Universitetsauditoriet Nr. 3.

GRUNDPRINCIPER

FOR

DEN INFINITESIMALE DESCRIPTIVGEOMETRI

MED ANVENDELSER PAA

LÆREN OM VARIABLE FIGURER.

AFHANDLING FOR DEN PHILOSOPHISKE DOCTORGRAD

AF

JOHANNES PETERSEN

CAND. MAG.

KJØBENHAVN.

JUL. GJELLERUPS BOGHANDEL.

S. L. MØLLERS BOGTRYKKERI.

1897.

Denne Afhandling er af det matematisk-naturvidenskabelige Fakultet erkendt værdig til at forsvares for Doktorgraden.

D. 4. Januar 1897.

Julius Petersen,
f. T. Dekanus.

I.

Fremstilling af infinitesimale Figurforskydninger i Planen.

---

1. Den infinitesimale Geometri har hidtil kun existeret i Kraft af Analysen; paa hvilket Standpunkt den for Øjeblikket befinder sig, kan ses af *Mannheim's* Bog: Principes et développements de Géométrie cinematique, Paris 1894 (pag. 44—62, 457—475, 492—500). pag. 499 omtaler Mannheim et Par Sætninger, der skulde kunne danne »les Eléments de Géométrie infinitésimale«. Disse Sætninger ere imidlertid af en fuldstændig algebraisk Natur og af den Grund vanskelige at anvende, og desuden forekomme de mig at være saa specielle, at de ikke kunne opstilles som Grundsætninger. Jeg skal nu gjennem nærværende Afhandling forsøge at give et Bidrag til en Fremstilling af den omtalte Videnskab paa geometrisk Grundlag.

2. I Planen antage vi givet 2 faste Punkter A og B samt 2 andre Punkter P og Q, der bevæge sig hen imod henholdsvis A og B saaledes, at de gjennemløbne Punktrækker have en vis indbyrdes geometrisk Afhængighed, og saaledes, at P falder i A, samtidig med at Q falder i B, og omvendt. Forholdet mellem P's og Q's Afstande fra henholdsvis A og B vil da i Almindelighed nærme sig til en ganske bestemt Værdi, naar P nærmer sig til A. Forholdet siges da at have denne bestemte Værdi, naar P falder i et Punkt A′, der ligger nærmere ved A end et hvilket som helst nok saa tæt ved A opgivet Punkt.

Q falder da i et tilsvarende Punkt B'. Afstandene AA' og BB' kunne altsaa ikke maales med noget endeligt Maal, men have dog et bestemt Forhold. Repræsentere vi altsaa AA' ved en en bestemt endelig Længde AA_1, afsat paa Linien AP (i Retningen AA') saaledes, at Forholdet mellem AA' og AA_1 har en bestemt uendelig lille Værdi ε, da vil BB' ogsaa blive fremstillet ved en bestemt endelig Længde BB_1 (i Retningen BB'), idet der er samme Forhold mellem AA_1 og BB_1 som mellem AA' og BB'. AA_1 ville vi kalde Punktet A's *Fluxion*, og A_1 dets *Fluxionspunkt*. Hvor intet andet er sagt, betegne vi altid i det følgende Fluxionspunktet for et vilkaarligt Punkt M ved M_1, medens det virkelige consecutive Punkt, det ved Fluxionen fremstillede Punkt, betegnes ved M'.

Vi kunne nu indse Muligheden af, at et Punktsystem, der er underkastet visse geometriske Betingelser, kan faa et fuldstændig bestemt Fluxionssystem, naar et af Punkterne faar en given Fluxion; det følgende skal give de vigtigste Principer for Udførelsen af saadanne Bestemmelser.

3. Betragtes et Punkt A, der faar en uendelig lille Forskydning til Stillingen A', da faas altsaa den tilsvarende Fluxion AA_1 ved at dividere AA' med ε; idet vi da kalde denne Størrelses reciproke Værdi **E**, kan man ogsaa sige, at Fluxionspunktet A_1 fremkommer ved at multiplicere A' med **E** med Hensyn til A. Vi antage nu, at en ret Linie a drejer sig om et af sine Punkter O saaledes, at et af dens Punkter A faar en given Fluxion AA_1. Linien faar da en uendelig lille Forskydning til Stillingen a', idet a og a' skære hinanden i O. Punktet A kan flyttes over paa a' paa mange andre Maader end den angivne. Der forlanges kun, at A' skal ligge paa a'. A_1 maa da ligge paa den Linie, man faar ved at multiplicere a' med **E** med Hensyn til A. Denne Linie bliver parallel med a', altsaa ogsaa med a (kun i særlige Tilfælde kan man blive nødt til at tage Hensyn til den uendelig lille Vinkel). Drager man altsaa gjennem det givne Punkt A_1 en Linie parallel med a, da vil

man faa det geometriske Sted for Endepunkterne af alle de Fluxioner, der føre A over paa a'. Den fundne Linie ville vi kalde a's *Fluxionslinie* med Hensyn til A, medens en vilkaarlig af de mulige Fluxioner kaldes *Liniens fri Fluxion i A*. O kaldes *Centralpunktet* for a.

Betragte vi nu et andet Punkt B paa Linien, da kan Retningen for dettes Forskydning over paa a' vælges vilkaarlig; vi vælge den da parallel med AA_1; det indses da umiddelbart, at B_1 maa ligge paa A_1O, idet alle rette Linier gjennem O afskære proportionale Stykker af de 2 Paralleler gjennem A og B. Paa denne Maade bestemmes Fluxionslinierne for alle Punkter paa a.

4. Af det foregaaende kan nu strax udledes følgende Constructioner: Naar 2 Punkter A og B paa en ret Linie a have bekjendte Fluxioner AA_1 og BB_1, da kan man erstatte BB_1 med BB_2 saaledes, at $B_1B_2 \neq a$, og $BB_2 \neq AA_1$. A_1B_2 vil da skære a i dennes Centralpunkt, og man kan da bestemme a's Fluxionslinie med Hensyn til ethvert af dens Punkter.

Naar Punktrækken (ABC . . .) paa Linien a er ligedannet med Rækken (A'B'C' . . .) paa a', da ville $A_1B_1C_1$ . . . danne en ny Punktrække, ligedannet med de andre. Dette fører til en anden Bestemmelse af en ret Linies Forskydning, naar 2 Punkters Fluxioner AA_1 og BB_1 ere givne. Vil man finde Liniens Fluxionslinie med Hensyn til et Punkt C, da drages A_1B_1, og denne deles ved et Punkt C_1 i samme Forhold som det, hvori AB deles af C. C_1 er da et Punkt paa den søgte Linie.

5. Naar et Liniestykke AB bevæger sig saaledes, at A og B faa Fluxionerne AA_1 og BB_1, da vil AB's Længde faa en uendelig lille Tilvæxt, der kan tænkes divideret med den samme uendelig lille Størrelse ε som AA' og BB'; den endelige Størrelse, som da kommer til at repræsentere Forøgelsen eller Formindskelsen i Længde, kaldes Liniens *Længdefluxion*.

Lad os først antage, at A ligger fast, medens B faar Fluxionen BB_1. Man kan da tænke sig en Cirkel med Centrum i A og gaaende gjennem B'; denne Cirkel skærer Linien AB i

et Punkt B'' saaledes, at BB'' er den uendelig lille Længdetilvæxt; multipliceres nu B' og B'' med **E**, idet B er Fællespunkt, da kommer B' i B_1, og B'' i et Punkt B_2 saaledes, at BB_2 er den søgte Længdefluxion. Ved den omtalte Multiplication vil Cirklen med Centrum i A og gaaende gjennem B' og B'' imidlertid gaa over til en ret Linie vinkelret paa AB. Altsaa ser man:

Naar det ene Endepunkt af et Liniestykke ligger fast, da vil Længdefluxionen være lig Projectionen af det andet Endepunkts Fluxion ned paa Linien.

Naar et Punkt A først faar en uendelig lille Forskydning til A', og dernæst en anden fra A' til A'', da ses det, at Fluxionspunktet svarende til A'' faas ved fra det første Fluxionspunkt at afsætte den anden Fluxion i Størrelse og Retning.

Antage vi nu, at Liniestykket AB faar en uendelig lille Forskydning saaledes, at A og B faa Fluxionerne AA_1 og BB_1, da kunne vi foretage en saadan Parallelforskydning med $A'B'$, at A' falder i A. Alle Punkter skulle da underkastes saadanne Forskydninger, at deres Fluxioner blive lige store og parallele med A_1A. Ved denne Ændring forandres Længden $A'B'$ ikke. Man drager da gjennem B_1 en Linie $B_1B_2 \mathrel{\overset{=}{\not\gtrless}} A_1A$. Dersom vi altsaa lade A ligge fast og give B Fluxionen BB_2, da faar Linien AB samme Længdefluxion som ved den oprindelige Forskydning. Den søgte Længdefluxion er da lig Projectionen af BB_2 paa AB.

Heraf kan da udledes den Sætning, at *Længdefluxionen for en ret Linie er lig den algebraiske Differens mellem Projectionerne af Endepunkternes Fluxioner ned paa Linien.*

I Stedet for at anvende denne Sætning, ville vi dog som Regel foretrække at construere Længdefluxionen paa den før angivne Maade: Man drager gjennem B_1 en Linie $B_1B_2 \mathrel{\overset{=}{\not\gtrless}} A_1A$ og projicerer B_2 ned paa Linien i B_3. BB_3 er da den søgte Fluxion. Ligger den i Forlængelsen af AB, er Længden

forøget, falder B_3 i B, er Længden forbleven constant, og ligger endelig B_3 mellem A og B, er Længden formindsket.

6. Naar 2 rette Linier bevæge sig saaledes, at de danne en constant Vinkel, da ville Linierne have congruente Fluxionssystemer. Dersom Centralpunkterne ere O_a og O_b, et Punkt paa den ene Linie har den normale Fluxion AA_1, et Punkt paa den anden har den normale Fluxion BB_1, da ville Trekanterne O_aAA_1 og O_bBB_1 være ligedannede.

En Linie AB antages nu at forandre sig saaledes, at A og B faa Fluxionerne AA_1 og BB_1. Et vilkaarligt Punkt C uden for Linien faar Fluxionen CC_1. Vi ville fælde den vinkelrette paa $A'B'$ fra C'. Den søgte Linie er consecutiv til den vinkelrette CD fra C paa AB. Da C skal bevæge sig paa den bevægelige Linie CD, kan dets Fluxion CC_1 erstattes med CC_2, idet $CC_2 \perp CD$, og $C_1C_2 \neq CD$. Paa lignende Maade erstattes AA_1 og BB_1 med de paa AB normale Fluxioner AA_2 og BB_2. Man drager nu A_2B_2, og fra C_2 fældes en vinkelret paa denne. Denne vinkelrette skærer da CD i dennes Centralpunkt O. Beviset ligger i den ovenfor omtalte Sætning. Den søgte Linie er altsaa nu bestemt ved at skulle gaa igjennem det faste Punkt O samt Punktet C', fremstillet ved Fluxionen CC_1 (eller CC_2).

Naar et Punkt bevæger sig ud ad en Curve, da er Bevægelsen i hvert Øjeblik rettet efter Tangenten; det samme er da Tilfældet med Punktets Fluxion. En Linie, der bevæger sig som Tangent til Curven, vil stadig have sit Centralpunkt i Røringspunktet. Dersom man nu kjender Røringspunktets og Tangentens samtidige infinitesimale Forskydninger saaledes, at Røringspunktet A faar en given Fluxion AA_1 paa Tangenten a (i Punktet A), og et Punkt B paa a faar den normale Fluxion BB_1, da kan man construere Krumningscentret O for Curven. O bestemmes nemlig som Centralpunkt for Curvens Normal i A og faas altsaa i Følge den for nylig løste Opgave ved at drage AB_1 og fælde en vinkelret fra A_1 paa denne; denne vinkelrette

skærer da Normalen i det søgte Krumningscentrum. Denne Construction viser ogsaa, hvorledes man kan finde BB_1, naar AA_1 er given, og Krumningsradius er bekjendt.

7. 2 rette Linier MA og NB antages at skære hinanden i P. MA drejes uendelig lidt om M saaledes, at dens fri Fluxion i A er AA_1; NB drejes paa lignende Maade om N saaledes, at dens fri Fluxion i B er BB_1. Vi ville bestemme P's Fluxion ɔ: finde Skæringspunktet mellem Liniernes consecutive Stillinger MA' og NB'. De to Linier MA og NB have hver sin Fluxionslinie med Hensyn til Punktet P; da nu P skal flyttes over paa saavel MA' som NB', maa dets Fluxionspunkt P_1 ligge i de 2 Fluxionsliniers Skæringspunkt.

8. Den her anvendte Methode vil dog ikke kunne bruges i det Tilfælde, da de 2 givne rette Linier falde sammen. Man har da følgende Opgave: Paa en ret Linie ligge 4 Punkter, M, A, B og N. To forskjellige infinitesimale Forskydninger af Linien ere bestemte, den ene ved Centralpunkt M og A's Fluxion AA_1, den anden ved Centralpunkt N og B's Fluxion BB_1. Find de derved bestemte consecutive Liniers Skæringspunkt. Anvende vi den sædvanlige Methode, da støde vi for det første paa den Vanskelighed, at Udgangsstillingerne for Linierne falde sammen, saa at Skæringspunktet P er ubestemt. Tage vi imidlertid et vilkaarligt Punkt P paa AB som Udgangspunkt, da blive de 2 Fluxionslinier, der skulle bestemme Fluxionspunktet P_1, parallele, og kun naar de falde sammen, kunne vi bruge det Punkt P, vi have valgt. Et Punkt med denne Egenskab findes nu ved at drage $MF \neq AA_1$ og $NF \neq BB_1$ og drage Linien fra Skæringspunktet X mellem MA_1 og NB_1 til F; XF gaar da gjennem P. Nu falde imidlertid de 2 Fluxionslinier sammen, saa at P_1 tilsyneladende er ubestemt, medens Linierne MA' og NB' dog i Virkeligheden maa have et bestemt Skæringspunkt. Grunden til denne tilsyneladende Ubestemthed er den, at Fluxionslinierne ikke ere parallele med AB, men danne uendelig smaa Vinkler med denne, lige saa store som de Vinkler,

Linien drejes. Her vil dette faa Betydning, hvilket sædvanligvis ikke er Tilfældet. Drages altsaa $PA_2 \neq AA_1$, og $PB_2 \neq BB_1$, idet A_2 og B_2 falde paa henholdsvis MX og NX, saa skal man behandle Linien A_2B_2 paa samme Maade, som vi oprindelig skulde gaa frem med MN. Vi kunne da fortsætte paa lignende Maade, men alle de fremkomne Systemer og deres Bevægelser blive ligedannede og ligedan beliggende med Hensyn til X. Altsaa maa den søgte Fluxion falde paa PX, og P_1 ligger da i Skæringspunktet mellem PX og A_2B_2. Specielt, naar AA_1 og BB_1 ere vinkelrette paa MN, bliver den søgte Fluxion Højden fra X i $\triangle$ MXN.

9. Vi ville betragte en Cirkel med Centrum O og gaaende gjennem Punktet A. O og A antages at have bekjendte Fluxioner OO_1 og AA_1, For at bestemme Fluxionen for et andet Punkt B paa Peripherien, behøve vi blot at udtrykke, at Radien OB faar samme Længdefluxion som OA. Derved bliver netop den Betingelse opfyldt, at B forskydes over paa Cirklens consecutive Stilling. Man ser da, at B_1 ikke bliver bestemt; man faar derimod en ret Linie parallel med Tangenten i B som geometrisk Sted for B_1. Denne Linie kalde vi *Cirklens Fluxionslinie i B* (eller med Hensyn til B). Fluxionspunktet for et Skæringspunkt mellem en ret Linie og en Cirkel, der hver for sig ere fremstillede med givne Fluxioner, faas da som Skæringspunkt mellem 2 Fluxionslinier, en for Cirklen og en for Linien, begge med Hensyn til det betragtede Punkt. Paa ganske lignende Maade søges Skæringspunkterne mellem 2 ved Fluxioner fremstillede Cirkler.

10. En Cirkel har Centrum O og gaar gjennem Punktet A; O og A faa Fluxionerne OO_1 og AA_1, hvorved man kommer til en ny Cirkel; vi ville søge Skæringspunkterne mellem de 2 Cirkler. Man skal altsaa opsøge et Punkt X paa den givne Cirkel saaledes, at X ikke behøver at have nogen Fluxion for at komme over paa den consecutive Cirkel. Projectionen af OO_1 paa OX skal da være lig den bekjendte Længdefluxion

for OA. Man tegner en Cirkel med Centrum O_1, og hvis Radius er lig denne Længdefluxion; Tangenterne fra O til denne Cirkel ere da parallele med Tangenterne til den givne Cirkel i de søgte Punkter, der altsaa nu kunne construeres. Der bliver egentlig derved 4 Løsninger, men kun de 2 svare til den rigtige Længdefluxion.

En anden Methode bestaar deri, at man overskærer de to Cirkler med en vilkaarlig ny Cirkel. Lad denne skære Cirklen (O, A)*) i Punkterne P og Q; for at faa dens Skæringspunkter med den consecutive Cirkel (O′, A′) drage vi Tangenterne i P og Q til Hjælpecirklen; disse Tangenters Skæringspunkter med de tilsvarende Fluxionslinier for P og Q blive da P_1 og Q_1. De 3 Cirklers Radicalcentrum M bestemmes nu som Centralpunkt for Linien PQ, idet P og Q faa Fluxionerne henholdsvis PP_1 og QQ_1; fra M fældes derpaa en vinkelret paa OO_1, og denne vinkelrette skærer da Cirklen (O, A) i de søgte Punkter.

11. Naar man kjender Fluxionerne for 3 Punkter paa en given Cirkel, da kan man finde Centrums Fluxion paa følgende Maade:

De tre Punkter antages at være A, B og C; Fluxionernes Projectioner paa de tilsvarende Radier kunne være AA_1, BB_1 og CC_1. Disse afsættes fra Centrum O paa de tilsvarende Radier OA, OB og OC saaledes, at:

$$OA_2 = AA_1,\ OB_2 = BB_1 \text{ og } OC_2 = CC_1.$$

Man oprejser nu i Punkterne A_2, B_2 og C_2 vinkelrette paa henholdsvis OA, OB og OC. Disse vinkelrette begrænse en Trekant $A_3B_3C_3$, idet $A_3B_2 \perp OB$, $A_3C_2 \perp OC$ o. s. v. De 3 Radier OA, OB og OC skulle nu have lige store Længdefluxioner. Fluxionspunktet for O antages at være O_1, og dets Projectioner paa OA, OB og OC henholdsvis O_A, O_B og O_C. Man skal da have:

$$O_AA_2 = O_BB_2 = O_CC_2.$$

*) ɔ: Cirklen med Centrum O og gaaende gjennem A.

Men heraf følger, at O_1C_3 maa være parallel med Halveringslinien for < AOB, og det tilsvarende for O_1A_3 og O_1B_3; men saa maa O_1 være Centrum for en i Trekant $A_3B_3C_3$ indskreven Cirkel, saaledes at O_1 ligger i samme Forhold til $\triangle A_3B_3C_3$, som O til den Trekant, der begrænses af Tangenterne i A, B og C til den givne Cirkel. Siderne i $\triangle A_3B_3C_3$ have imidlertid samme Afstand fra Siderne i den Trekant, der begrænses af de 3 til A, B og C svarende Fluxionslinier. Altsaa faar man følgende Sætning:

Naar en Cirkel med Centrum O underkastes en uendelig lille Forskydning (idet Cirklen selv er variabel), da vil Fluxionspunktet O_1 for O være Centrum for en Cirkel, der er indskreven i den Trekant, der begrænses af 3 vilkaarlige Fluxionslinier. Alle Cirklens Fluxionslinier ville berøre en og samme Cirkel med Centrum i O_1.

Ved Hjælp af den sidste Del af Sætningen kan man faa endnu en Bestemmelse af Skæringspunkterne mellem 2 consecutive Cirkler: Vi antage en Cirkel givet med Centrum O og gaaende gjennem A; O og A faa Fluxionerne OO_1 og AA_1. For at bestemme Skæringspunkterne mellem de to Cirkler fælde vi fra A_1 en vinkelret a_1 paa OA; derpaa tegnes en Cirkel, der rører a_1 og har Centrum i O_1. 2 af denne Cirkels Fællestangenter med Cirklen (O, A) ere da Fluxionslinier for de søgte Punkter. For at afgjøre, hvilke to Fællestangenter man skal bruge, kan man f. Ex. bruge den Omstændighed, at de ogsaa skulde berøre den Cirkel, man faar som Indhyllingscurve for Fluxionslinierne, naar de givne Fluxioner forøges eller formindskes i samme Forhold.

II.

Anvendelser af de fremstillede Principer.

12. *En ret Linie a bevæger sig saaledes, at den rører en given Curve (A)*) i det bevægelige Punkt A; den skærer to faste Curver (B) og (C) i de bevægelige Punkter henholdsvis B og C. Tangenterne til (B) og (C) i disse Punkter ere b og c, deres Skæringspunkt M. Man skal bestemme Tangenten til den af M gjennemløbne Curve (M), naar a bevæger sig.*

Fig. 1. Lader man a bevæge sig uendelig lidt, saaledes at B faar en vilkaarlig valgt Fluxion BB_1 paa b, da kan C's Fluxion bestemmes paa sædvanlig Maade: Man drager AB_1 og CC_2, den sidste parallel med BB_1; de to dragne Linier skære hinanden i C_2, hvor igjennem man trækker en Linie $\neq$ a; derved afskæres paa c netop C's Fluxion CC_1. Kaldes nu Krumningscentrerne for (B) og (C) i Punkterne B og C henholdsvis O_B og O_C, da drager man $O_B B_1$ og fælder en vinkelret paa denne fra B til Skæring i X med Normalen paa b i M. Ligesaa drages $O_C C_1$, og paa denne fældes fra C en vinkelret til Skæring i Y med Normalen paa c i M. Skæringspunktet mellem de to Linier gjennem X og Y parallele med henholdsvis b og c bliver da M's Fluxionspunkt M_1, og MM_1 er den søgte Tangent. Ved Hjælp heraf faar man ogsaa en Løsning af det Problem, *at*

---

*) I det følgende ville vi ofte bruge Betegnelsen (A) for den Curve, et vilkaarligt Punkt A gjennemløber.

bestemme den osculerende Plan for Skæringscurven mellem 2 Keglefladеr, hvis Spor ere givne i én Plan.

I Stedet for Curven (A) træder da et fast Punkt, nemlig Sporet for Toppunkternes Forbindelseslinie. Gjennem dette skal nu netop lægges Linier, hvis Skæringspunkter med Keglefladernes Spor (B) og (C) opsøges. I de fundne Punkter drages Tangenterne b og c til (B) og (C); Skæringspunktet M mellem b og c vil da være Sporet for en Tangent til Rumcurven, og Tangenten til (M) i M vil være Sporet for den søgte osculerende Plan.

13. *Construction af Rebroussementskanten til en udfoldelig Flade, bestemt ved 2 Ledecurver.* Vi antage, at en Frembringer f er construeret, skærende den ene Ledecurve i A, den anden i B; i disse to Punkter antages Ledecurvernes osculerende Planer at være α og β, Tangenterne a og b, medens Krumningscentrerne ere henholdsvis O_A og O_B. α og β skære hinanden i Linien s, og a og b træffe da s i samme Punkt S. Vi betragte nu den uendelig lille Bevægelse, som fører f over i den consecutive f,′ og skulle da blot bestemme Centralpunktet for f, da dette Punkt vil høre med til den søgte Rebroussementskant. Punktet S kan flyttes til en consecutiv Stilling ved en vilkaarlig valgt Fluxion SS_1 paa s. I det S nu betragtes som et Punkt af a, kan den valgte Fluxion erstattes med en anden, SS_2 vinkelret paa a saaledes, at $S_1 S_2 \neq$ a. For nu at finde Fluxionen for Punktet A drager man S_2A og fælder fra O_A en vinkelret paa denne. Denne vinkelrette afskærer da netop Stykket AA_1 paa a (6).

Paa lignende Maade bestemmes B's Fluxion BB_1. Nu kjender man Fluxionerne for 2 Punkter paa Linien f og kan altsaa i Følge 4 finde dens Centralpunkt ɔ: et Punkt af den søgte Rebroussementskant.

14. *Construction af Tangenten til en plan Curve af 3. Orden.*

Curven antages frembragt efter *Grassmann's* Methode: Et

Punkt X bevæger sig saaledes, at dets Forbindelseslinier med 3 faste Punkter A, B og C skære 3 givne Linier a, b og c i henholdsvis P, Q og R, der ligge paa en (bevægelig) ret Linie. X beskriver da en Curve af 3. Orden. Vi vælge Fluxionen PP_1 for P vilkaarlig (paa a). Da X ligger paa AP, kunne vi strax finde en ret Linie x, hvorpaa X_1 skal ligge, nemlig Fluxionslinien for AP med Hensyn til X. Q og R skulle have Fluxioner QQ_1 og RR_1 paa henholdsvis b og c.

Lade vi Q_1 gjennemløbe b, da vil R_1 gjennemløbe c saaledes, at de beskrevne Punktrækker ere ligedannede. Fluxionslinierne for BQ og CR med Hensyn til X ville da beskrive Parallelbundter, som skæres af en vilkaarlig Linie i ligedannede Punktrækker. Heraf følger, at sammenhørende Fluxionslinier for BQ og CR med Hensyn til X skære hinanden i Punkter, der ligge paa en ret Linie y. y kan bestemmes ved f. Ex. først at lade Q være Centralpunkt for Linien PQR og bestemme den dertil svarende Fluxion for R for derpaa at finde Fluxionslinien r for RC med Hensyn til X. BQ skærer da r i et Punkt af y. Dernæst kan man lade R være Centralpunkt for PQR og bestemme den tilsvarende Fluxion for Q, hvorpaa Fluxionslinien q for BQ med Hensyn til X skærer CR i et andet Punkt af y. y er da bestemt, og dens Skæringspunkt med x maa være det søgte Fluxionspunkt X_1, saa at XX_1 er den søgte Tangent.

15. *En foranderlig Trekant ABC bevæger sig saaledes, at de 3 Sider berøre Curver med given Krumning, og Vinkelspidserne B og C bevæge sig paa to andre Curver, hvis Krumningsradier ligeledes ere bekjendte; man skal finde Krumningscentret for den af A beskrevne Curve.*

Vi ville først bestemme Tangenten til den Curve, A beskriver. Man giver da B en vilkaarlig Fluxion BB_1 paa Tangenten til (B). Kaldes Røringspunkterne mellem Siderne BC, CA og AB og deres resp. Indhyllingscurver for a, b og c, da ville disse være Sidernes Centralpunkter under den uendelig lille Bevægelse. CC_1 findes da paa bekjendt Maade, og Skærings-

punktet mellem de 2 Fluxionslinier for AB og AC med Hensyn til A vil være A_1, saaledes at AA_1 er A's Fluxion. Bevægelsen bliver — saa længe det kun drejer sig om at finde AA_1 — den samme, hvis man lod Trekantens Sider dreje sig om de faste Punkter a, b og c, medens B og C gjennemløbe Tangenterne til (B) og (C). Linien AA_1 kunde altsaa ogsaa faas som Tangent til et Keglesnit, der gaar gjennem A, b, c, Skæringspunktet Q mellem ab og Tangenten til (B) i B, samt Skæringspunktet P mellem ac og Tangenten til (C) i C. Dette Keglesnit ville vi benytte til at finde den consecutive Tangent til Curven (A). Lade vi Trekanten bevæge sig saaledes, at B faar Fluxionen BB_1, da ville a, b og c faa Fluxioner aa_1, bb_1 og cc_1, der kunne construeres i Følge (6). Tangenterne i B og C til henholdsvis (B) og (C) ville ogsaa faa en i Følge (6) bestemt uendelig lille Forskydning. Fluxionerne PP_1 og QQ_1 for P og Q kunne da ogsaa bestemmes (7). Man har nu 5 Punkter af et Keglesnit: A', b', c', P' og Q', fremstillede ved Fluxionerne AA_1, bb_1, cc_1, PP_1 og QQ_1, og skal construere Tangenten i A'. Dette udføres ved Anvendelse af Pascals Sætning:

Man drager $c'Q'$ og $b'A'$; disse skære hinanden i M'. Dernæst drages $b'P'$ og $c'A'$, der skære hinanden i N'. Nu skære $M'N'$ og $P'Q'$ hinanden i T', der da skal ligge paa den søgte Tangent.

Disse Constructioner udføres ved Hjælp af 7.

M' bliver fremstillet ved en Fluxion MM_1, og N' bliver fremstillet ved NN_1. Nu er $M'N'$ fremstillet ved MN, idet M og N faa Fluxionerne MM_1 og NN_1. $P'Q'$ er fremstillet paa en lignende Maade. Skæringspunktet kan da findes i Følge 7, fremstillet ved Fluxionen TT_1, idet T ligger paa AA_1. Nu kunne vi bestemme Krumningsradius for (A) i A; naar man nemlig giver A Fluxionen AA_1, faar Tangenten en fri Fluxion TT_1 i Punktet T. TT_1 kan da erstattes med $TT_2 \perp AA_1$ saaledes, at $T_1T_2 \neq AA_1$. Drages AT_2, og fældes fra A_1 en vinkelret

paa denne til Skæring med (A)'s Normal, da have vi det søgte Krumningscentrum.

Man kunde ogsaa, i Stedet for at benytte Pascal's Sætning, gjentage den oprindelig anvendte Construction af AA_1 paa Trekantens consecutive Stilling.

16. *Bestemmelse af et Keglesnit, givet ved 5 consecutive Punkter.*

Man kjender af Keglesnittet: et Punkt A, dettes Krumningscentrum B, Krumningscentret C for Keglesnittets Evolut i B, samt endelig Krumningscentret D for Evolutens Evolut i C.

Man begynder da med at afsætte $\frac{1}{3} . \overline{CB}$ i Forlængelsen af CB saaledes, at $\overline{BE} = \frac{1}{3} . \overline{CB}$. Det er da bekjendt, at EA er Diameter i Keglesnittet (Maclaurin).

Giver man nu A Fluxionen $AA_1 = AB$ (paa Tangenten i A), da faar B Fluxionen $BB_1 = BC$ (paa BA), og C faar Fluxionen $CC_1 = CD$ (paa BC). Nu skal E flyttes saaledes, at Forholdet EB : BC stadig bliver $\frac{1}{3}$, altsaa faas E_1 i Følge 4 ved at drage C_1B_1 og paa dens Forlængelse afsætte $\overline{B_1E_1} = \frac{1}{3} \overline{C_1B_1}$. For at bestemme EA's Centralpunkt O (Centrum i Keglesnittet) drages da $E_1F \neq AE$, idet F ligger paa BC; FA_1 skærer da AE i O. Nu kjender man altsaa Keglesnittets Centrum O, samt et Punkt A med Krumningscirkel.

Diametren gjennem O og parallel med AA_1 er conjugeret til Diametren OA. Den consecutive Diameter OA′ vil være conjugeret til den Diameter, der er parallel med den consecutive Tangent. Man kan da f. Ex. tegne en Cirkel gjennem O og rørende AA_1 i A. Denne Cirkel skærer den med AA_1 parallele Keglesnitsdiameter i M. M faar nu en Fluxion MM_1 $\perp$ OM og = OM (til samme Side som Tangenten AA_1 drejes i den uendelig lille Bevægelse). Drages nu Tangenten til den tegnede Cirkel i M og søges dens Skæringspunkt M_2 med en Linie gjennem M_1 og $\neq$ OM, da faas Fluxionerne AA_1 og MM_2 for Skæringspunkterne mellem Cirklen og det betragtede Par af conjugerede Diametre. Centralpunktet P for Linien AM

kan da findes. Alle Cirkelchorder gjennem P ville da have den Egenskab, at deres Endepunkters Forbindelseslinier med O altid ere et Par conjugerede Diametre i Keglesnittet. Drages altsaa Cirkeldiametren gjennem P, faas paa denne Maade Keglesnittets Axer. Er det nu en Ellipse, hvilket kjendes paa, om P ligger inden i Hjælpecirklen, da kan man opsøge den ene af de fundne Axers Skæringspunkt Q med AA_1; over OQ som Diameter tegnes en Halvcirkel, der skærer den vinkelrette fra A paa OQ i et Punkt X saaledes, at OX er den Halvaxe, der skal afsættes ud ad OQ. Drager man gjennem A en Linie $\neq$ OQ til Skæring med OX, da faas et Punkt Y saaledes, at OY er lig den anden Halvaxe. Er det en Hyperbel, man har at gjøre med (P ligger uden for Cirklen), da benyttes lettest Asymptoterne.

17. *En ret Linie a gaar gjennem det faste Punkt C, rører Curverne (A) og (B) i henholdsvis A og B; Krumningscentrerne for Curverne i disse Punkter ere O_A og O_B. En bevægelig ret Linie l drejer sig om C, skærer Curverne i de bevægelige Punkter U og V (paa henholdsvis (A) og (B)). Curvernes Tangenter i disse Punkter skære hinanden i et Punkt M. Naar l nærmer sig til a uden Grænse, find da Grænsestillingen for M.*

Vi skulle da underkaste a en uendelig lille Drejning om C. Idet A opfattes som Skæringspunkt mellem a og (A), vil dets Fluxion danne en uendelig lille Vinkel med a, saa at Fluxionspunktet A_1' selv fremstilles ved et Fluxionspunkt A_{11}, som faas ved først at afsætte AA_1 vilkaarlig paa a, drage Linien $O_A A_1$, fælde en vinkelret paa denne fra A og søge denne vinkelrettes Skæringspunkt med Normalen paa a i A_1. Det fundne Punkt er da A_{11}. For nu at finde B's tilsvarende Fluxion operere vi som sædvanlig: Man drager gjennem C og A_{11} en Linie, søger dens Skæringspunkt P med en Linie gjennem B og $\neq AA_{11}$. Dette Skæringspunkts Afstand fra a er da lig B_1B_{11}. Da nu $\overline{BB_1}$ skal være Mellemproportional mellem $\overline{BO_B}$ og $\overline{B_1B_{11}}$, kan man construere den ved at søge Skæringspunktet Q mellem BO_B og en Linie gjennem P parallel med a. Fig. 2.

Derpaa tegnes en Cirkel over BQ som Diameter, og denne Cirkels ene Skæringspunkt R med en ret Linie gjennem O_B parallel med a ligger da i den søgte Afstand fra B. BB_1 kan da afsættes (til den ene eller den anden Side), og B_{11} er altsaa ogsaa bekjendt. For at finde det søgte Grænsepunkt skal man endnu kun søge Skæringspunktet mellem AA_{11} og BB_{11} og projicere dette paa a (8).

18. ***Naar 4 Punkter A, B, C og D paa et Keglesnit ere givne, og A's Tangent a er bekjendt, skal man construere Krumningscentret for Keglesnittet i A.***

Ved Hjælp af Pascal's Sætning kan man jo altid finde Tangenten i det ene af 5 opgivne Punkter paa et Keglesnit. Her er Keglesnittet bestemt ved de 4 Punkter A, B, C og D samt det til A consecutive Punkt A′ paa Tangenten a; A′ kan fremstilles ved en paa a vilkaarlig valgt Fluxion AA_1. Derved har man da 5 ganske bestemte Punkter A, A′, B, C og D paa Keglesnittet, og Tangenten i A′ findes da som sædvanlig: Man søger Skæringspunktet X mellem AA′ og BC, Y mellem AD og BA′, og Linien XY skærer da CD i et Punkt af den søgte
Fig. 3. Tangent. Punktet X findes strax som Skæringspunkt mellem a og BC; Y fremstilles ved en Fluxion AY_1, idet man faar Y_1 som Skæringspunkt mellem AD og en Linie gjennem A_1 parallel med AB. Søges nu Skæringspunktet Z mellem XY_1 og en Parallel med AY_1 gjennem Skæringspunktet U mellem CD og a, og lægges en Parallel med a gjennem det fundne Punkt til Skæring med CD i P, da vil UP være fri Fluxion for Linien AA′, idet denne tænkes forskudt, til den falder i den søgte Tangent. P's Projection paa a's Normal i U kaldes V. Den vinkelrette fra A_1 paa VA skærer da Normalen paa den uendelig lille Chorde AA′ i A i det til A diametralt modsatte Punkt O af den søgte Krumningscirkel.

Vælger man Fluxionspunktet A_1 i X (X er Skæringspunktet mellem a og BC), da reduceres Constructionen paa følgende Maade:

Man søger Skæringspunkterne X og U mellem a og henholdsvis BC og CD; gjennem X og U drages Paralleler med henholdsvis AB og AD. De fundne Linier skære hinanden i Z; gjennem dette Punkt drages en Linie parallel med a til Punktet V, hvor den skærer en vinkelret paa a gjennem U. En vinkelret paa VA fra X vil da paa Normalen til AA′ i A afskære et Stykke, der er det dobbelte af den søgte Krumningsradius. Da X og U spille samme Rolle, kan man let samtidig faa 2 Bestemmelser af Krumningscentret. Fig. 4.

Den fundne Construction ligner den, som Mannheim i »Géométrie cinematique« p. 578 har angivet som Resultat af temmelig vidtløftige Beregninger.

Den bliver ubrugelig, naar enten X eller U falder uendelig fjærnt, men dette kan altid undgaas ved at tage Vinkelspidserne for Firkanten ABCD i en passende Orden.

Da vi af den givne Figur kun have benyttet Linierne AD og AB samt Punkterne X og U, maa alle de Keglesnit, man faar ved at lade Firkanten ABCD forandre sig saaledes, at de omtalte Elementer ligge fast, have samme Krumning i A. Man kan da opfatte den søgte Krumningscirkel som den Cirkel, der rører a i A og skærer Linierne AD og AB i Punkterne K og L, saa at UK og XL skære hinanden paa Cirklen.

Den oprindelig forelagte Opgave er dermed reduceret til en elementær plangeometrisk Constructionsopgave.

Denne løses paa følgende Maade: AD inverteres med Hensyn til U (Potens: $\overline{AU}^2$), og AB med Hensyn tll X (Potens: $\overline{AX}^2$). De derved fremkomne Cirkler skære hinanden i A og et nyt Punkt M, der maa ligge paa den søgte Cirkel.

Normalen paa a i A skæres da af den vinkelrette paa Midten af AM i Centrum for den søgte Cirkel.

Den vinkelrette paa Midten af AM er imidlertid Centerlinie for de ved de omtalte Inversioner fremkomne Cirkler, og man faar da følgende simple Løsning af Opgaven:

De vinkelrette fra X og U paa henholdsvis AB og AD

Fig. 5. *træffe Keglesnittets Normal i A i Punkterne henholdsvis P og Q. Forbindelseslinien mellem Midtpunkterne af XP og UQ gaar da gjennem det søgte Krumningscentrum O.*

19. *Man har givet 4 Tangenter a, b, c og d til et Keglesnit, samt Røringspunktet A for a; bestem Krumningscentret for Punktet A.*

Vi ville bestemme Krumningscirklen som den Cirkel, der
Fig. 6. berører a i A, og som tangerer den fra et til A consecutivt Punkt A′ paa a udgaaende Tangent a′ til Keglesnittet. A′ bestemmes ved en paa a valgt Fluxion AA_1; a′ findes derpaa ved Brianchon's Sætning; idet a skærer b og d i henholdsvis M og Q, medens c skærer b i N og d i P, forbinder man Q med Skæringspunktet mellem AN og A′P; den fundne Forbindelseslinie skærer da MN i et Punkt af a′.

Vælges A_1 i M faas følgende Construction:

En Linie gjennem M parallel med AP skærer AN i R, og QR skærer en Linie gjennem M $\neq$ AN i S.

Gjennem S drages en Parallel med a til Skæring i T med Normalen paa a i M. Overgangen fra a til a′ bestemmes da ved Centralpunktet A og Fluxionen MT. For at finde Krumningscentret skal man søge Skæringspunktet mellem Keglesnittets Normal i A og Halveringslinien af Vinklen mellem a og a′. Derfor vil den vinkelrette fra M paa AT afskære et Stykke AO paa Keglesnittets Normal i A, som er llg det halve af den søgte Krumningsradius.

20. *Et Keglesnit er givet ved 5 Punkter A, B, C, D og E. Bestem Krumningscentret for A.*

Man anvender da Pascal's Sætning til Bestemmelse af Tangenten i A, søger altsaa Punkterne: X som Skæringspunkt mellem AB og DE, Y som Skæringspunkt mellem AE og BC, og drager XY til Skæring i Z med DC. AZ er da Tangenten. Nu giver man A en infinitesimal Forskydning ud ad AZ til A′. Denne Forskydning fremstilles ved en Fluxion, som kan vælges vilkaarlig. Vi kunne f. Ex. vælge A's Fluxionspunkt A_1 i

Skæringspunktet mellem AZ og BE. Man kan da bestemme Fluxionerne for X og Y og dermed for Z, altsaa ogsaa Tangentens normale Fluxion i Z; er denne ZZ_1, drager man Linien AZ_1, og fra A_1 fældes en vinkelret paa denne til Skæring i O med Keglesnittets Normal i A. O er da det søgte Krumningscentrum.

21. *En ret Linie a drejer sig om et fast Punkt A og skærer Curvene (B) og (C) i de bevægelige Punkter B og C. Et Punkt X paa Linien er bestemt saaledes, at Dobbeltforholdet (ABCX) er constant. Man skal finde Krumningscentret for den af X beskrevne Curve (X).*

Man giver da B Fluxionen BB_1 og bestemmer Fluxionerne CC_1 og XX_1 for C og X. Tangenterne (B) og (C) i B og C kaldes henholdsvis b og c; ligeledes kaldes Tangenten til (X) i X for x. Man ser da, at b, c og x maa gaa gjennem samme Punkt M; i Følge 12 kan Fluxionen MM_1 nu bestemmes, og denne vil da være fri Fluxion for x i M. MM_1 erstattes nu af $MM_2 \perp x$ saaledes, at $M_1M_2 \neq x$; man drager derpaa M_2X og fælder fra X_1 en vinkelret paa denne til Skæring i O med Normalen tll (X) i X. O er da det søgte Krumningscentrum.

22. *Bestemmelse af Indhyllingscurven for en Cirkel, der af 2 faste Cirkler afskærer Buer med constant Længde.*

Den bevægelige Cirkel antages tegnet i en bestemt Stilling med Centrum O og skærende de to faste Cirkler i henholdsvis A og B, C og D. Centralpunktet for AB er dens Midtpunkt M, og Centralpunktet for CD er dennes Midtpunkt N, idet man betragter en uendelig lille Forskydning af den bevægelige Cirkel. MN maa da være Fælleschorde for den bevægelige Cirkel og dens consecutive Stilling, og MN's Skæringspunkter med den betragtede Cirkel maa altsaa være Punkter af den søgte Indhyllingscurve. Vi ville nu søge dennes Krumningscentrum i et af disse Punkter P. Vi vælge en vilkaarlig Fluxion for O, $OO_1 \perp MN$. Fluxionerne MM_1 og

NN_1 kunne da bestemmes, altsaa ogsaa Fluxionen for P (paa Tangenten i P).

Nu kjender man Fluxionerne for O og P og kan altsaa finde OP's Centralpunkt, som netop er det søgte Krumningscentrum.

Som et andet Exempel paa Bestemmelse af Indhyllingscurven for en foranderlig Cirkel kan nævnes det, hvor Cirklen stadig skal være omskreven om en Trekant, hvis Sider tangere hver sin givne Curve saaledes, at 2 af Siderne i Røringspunkternes Trekant ogsaa tangere hver sin af to bekjendte Curver. Man kan da i Følge 12 finde Fluxionerne for Vinkelspidserne i den Trekant, hvorom Cirklen stadig skal være omskreven, og 10 giver derefter Skæringspunkterne mellem de to consecutive Cirkler.

III.

Bevægelse af plane Figurer med constant Projectivitetssammenhæng.

---

23. Den rette Linies projective Geometri er væsentlig bygget paa Begrebet »Wurf«, indført af *v. Staudt.**) Geometrien i Planen kan bygges paa den éndimensionale Geometri. Men man kan ogsaa her begynde med at indføre Begrebet *Projectivitetssammenhæng.* Man kan bevise, at 4 vilkaarlige Punkter i samme Plan altid kunne betragtes som Billede (frembragt ved Centralprojection) af 4 vilkaarlige andre Punkter i én Plan ɔ: det ene System kan flyttes saaledes, at det bliver Billede af det andet. Deraf sluttes, at 4 Punkters Beliggenhedsforhold ikke charakteriseres ved nogen projectiv Egenskab, forudsat at de ikke ligge paa samme rette Linie. Tager man imidlertid 5 Punkter i Planen: A, B, C, D og E, da ville disse ikke altid kunne betragtes som Billede af et andet System A_1, B_1, C_1, D_1 og E_1. Hvis de to Systemer virkelig skulle kunne bringes i et saadant Beliggenhedsforhold, at de ere hinandens gjensidige Billede for et eller andet Øjepunkt, maa de altsaa opfylde en Betingelse, have en Egenskab fælles. Denne Egenskab udtrykkes naturlig ved at sige, at de to Systemer have samme Projectivitetssammenhæng. Vi sige da ogsaa i Almindelighed, at to plane Figurer have samme Projectivitets-

---

*) Definition: Beiträge zur Geometrie d. Lage S. **15**; videre Præcision S. **166**.

sammenhæng, naar de kunne bringes i et saadant indbyrdes Beliggenhedsforhold, at de ere hinandens Billede. Naar vi i det følgende tale om Projectivitetssammenhængen (ABCD . . .), da mene vi dermed en enkelt, men ikke nogen bestemt af alle de Figurer, der ere collineære med (ABCD . . .).

24. Vi ville nu undersøge, hvilke forskjellige Figurer der ved Valg af Øjepunkt og Billedplan i specielle Stillinger kan fremkomme af et givet System af 5 Punkter i en Plan, idet vi antage, at ikke 3 af de givne Punkter ligge paa en ret Linie. Man kan vælge Øjet a) uden for Figurens Plan, b) i denne Plan, hvorunder vil være at undersøge, hvorledes det gaar, 1) naar Øjet ligger uden for Forbindelseslinierne mellem 2 og 2 af de 5 Punkter, 2) naar Øjet ligger paa en af disse Linier, og 3) naar det falder i et af de 5 givne Punkter. Andre Tilfælde kunne ikke være mulige. Billedplanens Stilling kan ikke give Anledning til særlige Forhold undtagen, naar den gaar gjennem Øjet, hvilket Tilfælde vi imidlertid ville se bort fra (Punkternes Billeder blive da enten ubestemte eller falde i Øjepunktet).

Vælge vi Øjet uden for Planen, da vil Billedet blive et nyt System af 5 Punkter, hvoraf ikke 3 ligge paa samme rette Linie. Vælges Øjet i Planen, men uden for Punkternes Forbindelseslinier, da faas ved Afbildning paa en vilkaarlig Plan 5 Punkter paa samme rette Linie. Ligger Øjet paa en af de givne Punkters Forbindelseslinier, da ville 2 Punkters Billeder falde sammen, men for øvrigt falde alle Billederne paa en ret Linie; dette Tilfælde er da ikke væsentlig forskjelligt fra det forrige. Endelig kan Øjet vælges i et af de givne Punkter. Dettes Billede bliver da aldeles ubestemt, medens de andre Punkter afbildes paa en ret Linie. En given Projectivitetssammenhæng kan altsaa antage følgende Former: 1) alle 5 Punkter kunne ligge paa en ret Linie (maaske kunne 2 falde sammen, men i Almindelighed ikke flere), 2) de 4 af Punkterne A_1, B_1, C_1 og D_1 kunne ligge paa en ret Linie, og E_1 vilkaarlig, dog kræves der, at

$$E_1(A_1B_1C_1D_1) \overline{\wedge} E(ABCD).$$

Heraf følger atter:

Naar 2 Figurer have samme Projectivitetssammenhæng, og 3 Punkter i den ene Figur, der ikke ligge paa samme rette Linie, svare til 3 Punkter paa samme rette Linie i den anden Figur, da ville alle Punkter i den første Figur svare til Punkter paa denne rette Linie, undtagen ét, hvis tilsvarende Punkt er ubestemt.

25. I Følge det foregaaende er et System af 5 Punkter med given Projectivitetssammenhæng bestemt, naar de 4 Punkter ere givne. Ligge altsaa de 4 Punkter fast, er det femte fuldstændig bestemt. Ligge 3 af Punkterne fast, og det fjerde bevæger sig paa en bestemt Maade, da vil ogsaa det femte faa en aldeles bestemt Bevægelse. Vi kalde de 5 Punkter A, B, C, D og E og antage, at A, B og C ligge fast, medens D beskriver en ret Linie d og frembringer Punktrækken (D) paa denne. E vil da ogsaa beskrive en ret Linie saaledes, at Punktrækken (E) er projectiv med (D). Man har nemlig: $A(D) \overline{\wedge} A(E)$, og $B(D) \overline{\wedge} B(E)$; men A(D) og B(D) ere perspectiviske, altsaa $A(E) \overline{\wedge} B(E)$. Da nu imidlertid AB i Bundtet A(E) svarer til AB i A(D), og AB i Bundtet B(E) svarer til AB i B(D), saa er A(E) perspectivisk med B(E), og E beskriver da en Punktrække projectiv med (D). Skæringspunkterne mellem Banerne og enhver af Linierne BC, CA og AB give sammenhørende Stillinger.

Vi have altsaa bevist Sætningen:

*Naar en plan Figur (hvorved forstaas i udvidet Forstand Indbegrebet af alle Planens Punkter) bevæger sig i sin Plan uden at forandre Projectivitetssammenhæng, og 3 af dens Punkter ligge fast, medens et 4de Punkt beskriver en ret Linie, da ville alle Punkter beskrive rette Linier saaledes, at de gjennemløbne Punktrækker ere projective, med sammenhørende Punkter paa hver af den faste Trekants Sider.**)

---

*) Burmester: Kinematisch-geometrische Untersuchungen (Zeitschrift f. Math. u. Physik, 20. Jahrg. S. 384.

Lader man de 3 Punkter ligge fast, og et 4de Punkt gjennemløbe hele Planen, da ville alle de andre Punkter ogsaa gjennemløbe hele Planen saaledes, at de beskrevne Figurer ere collineære, med A, B og C til Fællespunkter. Ethvert Punkt paa en af den faste Trekants Sider bevæger sig paa den Side, hvorpaa det ligger, saa at disse Punkter kun gjennemløbe rette Linier, medens de andre beskrive hele Planen.

En ret Linie (opfattet som Bærer for alle sine Punkter) vil vedblive at være en ret Linie. Dens Bevægelse bestemmes ved Bevægelsen af 2 af dens Punkter P og Q. Disse beskrive projective Punktrækker, og man faar alle Liniens Stillinger ved at forbinde sammenhørende Punkter i disse Rækker. Linien vil altsaa indhylle et Keglesnit, der berører alle 3 Sider i den faste Trekant. En Linie gjennem et af de faste Punkter vil dog beskrive et Liniebundt.

26. Idet vi stadig betragte den omtalte Bevægelse, kunne vi bevise, at enhver ret Linie p i Planen vil være Bane for ét, og kun ét, af sine Punkter. Den rette Linies Punkter beskrive nemlig Linier, der indhylle et Keglesnit, der berører p i et Punkt P, og dette vil da være det eneste, der bevæger sig ud ad p. Man ser altsaa, at der til ethvert Punkt P svarer en bestemt Banelinie p, og omvendt; Forbindelsen mellem den bevægede Figur og Banernes Figur vil altsaa være et én-entydigt Figurslægtskab. Man ser, at det er en qvadratisk-reciprok Forbindelse.

Bevægelsen kan altsaa siges at være af den Beskaffenhed, at den bevægede Figur »glider« paa en dermed qvadratisk-reciprok forbunden Figur.

Af den opstillede Figurforbindelse følger f. Ex., at alle de Punkter, hvis Baner gaa gjennem et givet Punkt, ville ligge paa et Keglesnit, der er omskrevet om den faste Trekant.

En Bevægelse, der svarer dualistisk til den nævnte, faas ved at gaa ud fra Linien som Figurelement. Man faar da Sætninger, der svare fuldstændig til de allerede fundne, altsaa:

Naar 3 Linier i en Figur med constant Projectivitetssammenhæng ligge fast, og en 4de Linie drejer sig om et fast Punkt, da ville alle Figurens Linier dreje sig om faste Punkter saaledes, at de beskrevne Liniebundter ere projective. Alle Figurens Punkter beskrive Keglesnit, der ere omskrevne om den faste Trekant.

Enhver af de to Bevægelser kan erstatte den anden, naar der kun er Tale om infinitesimale Figurforskydninger.

27. Idet vi betragte Bevægelsen i et vist Øjeblik, vil jo en uendelig lille Forskydning af ét af Figurens Punkter medføre en ganske bestemt uendelig lille Forskydning af alle de øvrige Punkter. For at maale disse Forskydninger fremstille vi dem ved Fluxioner. Har man nu givet de 3 Centralpunkter (Vinkelspidserne i den faste Trekant*)) A, B og C samt et Punkt D's Fluxion DD_1, da maa man kunne construere Fluxionen EE_1 for et vilkaarligt Punkt E.

Vi ville først bevise følgende Sætning, idet den betragtede Bevægelse kaldes *en lineær Bevægelse:*

Ved en lineær Bevægelse ville alle Punkter paa en ret Linie gjennem det ene Centralpunkt A have deres Bevægelse rettet mod samme Punkt paa BC (den modstaaende Centrallinie).

Sætningens Rigtighed indses derved, at Liniens Punktrække er perspectivisk med sine følgende Stillinger saaledes, at sammenhørende Punkter falde paa BC.

Ved Hjælp heraf kan man nu finde Fluxionens Retning for et vilkaarligt Punkt E, naar den er given for D. Man kan nemlig trække Linierne EA og DB, der skære hinanden i F. F's Bane bestemmes da ved, at den gaar til Skæringspunktet mellem DD_1 og AC, og derpaa bestemmes E's Bane paa lignende Maade.

Man kunde ogsaa anvende den i 26 fundne Sætning:

---

*) Den faste Trekant kalde vi i det følgende *Centraltrekanten*, dens Vinkelspidser og Sider kaldes henholdsvis Centralpunkter og Centrallinier for Bevægelsen.

Lægges et Keglesnit gjennem A, B, C, D og E, da skærer dette DD_1 i et Punkt af E's Bane.

Derved er Bevægelsesretningen for Punktet E bestemt. Vi skulle nu bestemme Størrelsen af E's Fluxion EE_1.

Linien BDF har Centralpunkt i B, D har en bekjendt Fluxion, og F's Fluxion, der har en bekjendt Retning, kan da bestemmes i Følge 3. Paa Linien AEF er nu A Centralpunkt, F har en bekjendt Fluxion FF_1, og E's Fluxion har en given Retning. EE_1 bestemmes da ogsaa i Følge 3.

28. Vi ville nu undersøge det geometriske Sted for Fluxionspunkterne til en ret Linies Punkter. Fluxionerne ere proportionale med de virkelig beskrevne uendelig smaa Baneelementer. Vi ville da først løse følgende Opgave:

Et Keglesnit (K) er givet med 2 af dets Tangenter a og b. En bevægelig Tangent x til (K) skærer a og b i de bevægelige Punkter A og B og en given Linie l i Punktet L. Find det geometriske Sted for et Punkt X paa x saaledes, at Projectivitetssammenhængen (ABLX) ikke forandres. Vi ville løse denne Opgave ved at betragte den omtalte Figur som Billede af en Rumfigur. Til Punktrækkerne (A) og (B) lade vi svare to Punktrækker i Rummet (A_1) og (B_1), der da blive projective, og til L svarer et Punkt i Sestraaleplanen for l. Det til X svarende Punkt X_1 maa da ligge i en anden Plan, idet $(A_1B_1L_1X_1)$ skal være uforandret. Det skal tillige ligge paa den Flade af 2. Orden, som Linien A_1B_1 beskriver. Altsaa er det geometriske Sted for X_1 i Almindelighed et Keglesnit. Det samme er da Tilfældet med X. Kun naar l tangerer (K), bliver det geometriske Sted for X en ret Linie.

Lader mau nu a og b være consecutive Tangenter, og ader man l være den uendelig fjærne Linie i Planen, da er det geometriske Sted for X en Parabel med Axeretning $\neq$ a. Men Stykkerne AX ere da netop proportionale med de tilsvarende Stykker AB. Man ser altsaa:

Naar en ret Linie bevæger sig saaledes, at dens Punktrække

har constant Projectivitetssammenhæng, da ville Fluxionspunkterne for alle dens Punkter ligge paa en Parabel med den givne Linie til Diameter. Naar Punktrækken bevæger sig ligedannet med sig selv, da ville Fluxionspunkterne dog ligge paa en ret Linie.

29. Nu kan man bestemme Fluxionerne for alle Liniens Punkter, naar 2 Punkters Fluxioner ere givne, medens et 3dje Punkts Bevægelsesretning er bekjendt. Man kan da først i Følge 4 bestemme Liniens Centralpunkt, og det Keglesnit, som Punkternes Baner indhylle, er da bestemt (man kjender 3 Tangenter og en Tangent med Røringspunkt). Drages altsaa fra det vilkaarlige Punkt P paa Linien en Tangent til dette Keglesnit, da er P's Bevægelsesretning bestemt, og selve Fluxionen PP_1 faas da ved 3. Fluxionspunktet for Liniens Centralpunkt bestemmes som Skæringspunkt mellem Linien og den Parabel, som gaar gjennem alle Fluxionspunkterne.

30. *To uendelig smaa Forskydninger af en Figur med constant Projectivitetssammenhæng kunne sammensættes til én, idet de enkelte Punkters Fluxioner sammensættes som Kræfter.*

For at vise, at Projectivitetssammenhængen bevares under den saaledes bestemte uendelig lille Forskydning, behøver man kun at undersøge, om 3 Punkter, der ligge paa en ret Linie, atter føres over i 3 Punkter paa en ret Linie. Vi antage, at de 3 Punkter ere A, B og C; disse underkastes 2 uendelig smaa Bevægelser, den ene med Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1, og den anden med Fluxionerne AA_2, BB_2 og CC_2. Vi sammensætte nu de to Bevægelser paa den angivne Maade, saa at man faar Fluxionerne AA_3, BB_3 og CC_3. A_1, A_2 og A_3 projiceres paa Liniens Normal i A, saa at man faar Punkterne A_1', A_2' og A_3'. Paa lignende Maade projiceres B's Fluxioner paa Normalen i B og C's Fluxioner paa Normalen i C. Man véd da, at A_1', B_1' og C_1' ligge paa en ret Linie, og det samme er Tilfældet med A_2', B_2' og C_2'. Man skal nu vise, at A_3', B_3' og C_3' ogsaa maa ligge paa samme rette Linie. Men dette følger af,

at $A_2'A_3' = AA_1'$, $B_2'B_3' = BB_1'$, og $C_2'C_3' = CC_1'$ (Julius Petersen: Methoder og Theorier Opg. 161).

31. Vi ville betragte den infinitesimale Bevægelse af en ret Linie, der glider ud ad sig selv, idet dens Punktrække har constant Projectivitetssammenhæng. For at Bevægelsen skal være bestemt, er det da nødvendigt at kjende Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1 for 3 af Liniens Punkter A, B og C. Vi skulle vise, hvorledes man kan bestemme de øvrige Fluxioner. Man ser, at det her egentlig drejer sig om at løse følgende Opgave:

Bestem sammenhørende Punkter i 2 collocale projective Punktrækker, naar man har givet 3 Elementpar AA′, BB′ og CC′ saaledes, at Afstandene AA′, BB′ og CC′ ere uendelig smaa.

For at løse dette Problem ville vi til den givne Forskydning føje en anden, saaledes bestemt, at A ligger fast, medens alle de andre Punkter have deres Bevægelse rettet mod et fast Punkt P uden for Linien; B's Fluxion BB_2 i den tilføjede Bevægelse vælges vilkaarlig. Man kjender da Liniens Centralpunkt A med Fluxionen AA_1 i den resulterende Bevægelse, endvidere kjendes B's Fluxion samt et geometrisk Sted for C's Fluxionspunkt, nemlig en Parallel med CP gjennem C_1; et andet geometrisk Sted for C's Fluxionspunkt vil være den givne Linies Fluxionslinie i C i den tilføjede Bevægelse. Betragtes nu et vilkaarligt Punkt D paa den rette Linie, da kan man finde dets Fluxion saa vel i den tilføjede som i den resulterende Bevægelse paa bekjendt Maade. Dets Fluxion i den oprindelige Bevægelse kan da ogsaa bestemmes (30). Fællespunkterne for de 2 collocale Punktrækker findes ved fra P at drage Tangenter til det Keglesnit, der indhylles af Banerne i den resulterende Bevægelse. Disse Tangenters Skæringspunkter X og Y med den givne Linie ville da være de søgte Fællespunkter, idet f. Ex. X har samme Bevægelsesretning i den tilføjede og den resulte-

rende Bevægelse og maa altsaa i den egentlige Bevægelse have Fluxionen Nul.

Vi ville nu bestemme Fluxionen for et vilkaarligt Punkt i en plan Figur, der bevæger sig med constant Projectivitetssammenhæng, idet vi gaa ud fra, at 4 Punkters Fluxioner ere bekjendte. Denne Opgave er i Virkeligheden den samme som den, at bestemme sammenhørende Punkter i 2 collocale plane collineære Figurer, naar 4 givne Punkter i den ene svare til 4 givne Punkter i den anden Figur, idet Afstandene mellem sammenhørende Punkter ere uendelig smaa. Antage vi, at de 4 Punkter ere A, B, C og D, og at Skæringspunktet mellem AB og CD kaldes E, da kan E's Fluxionspunkt bestemmes som Skæringspunkt mellem de bekjendte Fluxionslinier for AB og CD med Hensyn til E. Man kjender da alle Fluxionerne for Punkterne paa AB og CD. Paa lignende Maade kan man bestemme Bevægelsen af AC og BD. Skal man nu f. Ex. finde Fluxionen for Punktet P, kan man forbinde det med A. PA skærer BC og CD i 2 Punkter, hvis Fluxioner ere bekjendte, og da man tillige kjender Fluxionen for A, kan P's Fluxion bestemmes i Følge 29. Der vil i Almindelighed være 3 Punkter, hvis Fluxioner ere Nul, nemlig Fællespunkterne for de to collineære Figurer.

33. Som et specielt Tilfælde af den lineære Bevægelse kan mærkes det, hvor et Punkt D's Fluxion DD_1 er rettet mod et af Centralpunkterne A. Det samme vil da være Tilfældet med alle Punkter paa AD; det ses endvidere, at dennes Skæringspunkt med BC ligger fast; da altsaa 3 Punkter paa BC ligge fast, maa alle Punkter paa denne Linie ligge fast. Vi have da *en perspectivisk Bevægelse*, hvor A er Homologicentrum, og BC Homologiaxe for 2 vilkaarlige af Figurens Stillinger. Constructionen af Punkternes Fluxioner er her temmelig simpel, idet enhver ret Linies Centralpunkt falder paa BC og har Fluxionen Nul. Sammensættes to uendelig smaa perspectiviske Bevægelser med samme Homologicentrum eller Homologiaxe, faas en ny

perspectivisk Bevægelse i Følge bekjendte geometriske Sætninger. Havde de ikke samme Centrum eller Homologiaxe, bliver den resulterende Bevægelse en almindelig projectiv Bevægelse med 3 faste Punkter (en lineær Bevægelse); Homologiaxernes Skæringspunkt bliver da det ene Centralpunkt og Centrernes Forbindelseslinie bliver den modstaaende Centrallinie. De to andre Centralpunkter bestemmes da som dennes faste Punkter.

En uendelig lille projectiv Bevægelse kan omvendt altid opløses i 2 perspectiviske Bevægelser, og det paa uendelig mange Maader. Kaldes Centraltrekanten ABC, da kan man f. Ex. tage A som Centrum og BC som Homologiaxe i en perspectivisk Bevægelse, saa at Punktrækken paa AC faar sin rigtige Bevægelse. I en anden perspectivisk Bevægelse tages dernæst B til Centrum og AC til Homologiaxe, saa at Punktrækken paa AB faar sin virkelige Bevægelse. De to perspectiviske Bevægelser ville da ved Sammensætning fremkalde den oprindelig givne Forskydning af Figuren.

For imidlertid at vise, at Opløsningen kan foretages paa uendelig mange Maader, antage vi Bevægelsen given ved Centraltrekanten ABC samt et vilkaarligt Punkt D's Fluxion DD_1. Paa BC vælge vi to vilkaarlige Punkter P og Q; disse have Fluxionerne PP_1 og QQ_1. DD_1 opløses i 2 Fluxioner rettede efter P og Q saaledes, at man paa DP faar DD_2 og paa DQ Fluxionen DD_3. Man kan nu bestemme en perspectivisk Bevægelse med Centrum i P, og hvis Homologiaxe gaar gjennem A, medens D faar Fluxionen DD_2, og Q Fluxionen QQ_1. For at bestemme Homologiaxen behøver man nemlig kun at finde Centralpunktet for Linien DQ (idet D og Q have Fluxionerne DD_2 og QQ_1) og forbinde dette med A. Paa lignende Maade bestemme vi en anden perspectivisk Bevægelse med Centrum i Q, og hvis Homologiaxe gaar gjennem A, medens D faar Fluxionen DD_3, og P Fluxionen PP_1. De to perspectiviske Bevægelser ville nu ved at sammensættes give Figuren en

saadan Forskydning, at A ligger fast, D faar Fluxionen DD_1, og P og Q faa Fluxionerne PP_1 og QQ_1; men denne Forskydning er netop den, der svarer til den oprindelig givne Bevægelse.

34. I enhver uendelig lille Bevægelse af en plan Figur med constant Projectivitetssammenhæng gives der en Punktrække, der under den uendelig lille Forskydning forbliver congruent med sig selv. I to collineære plane Figurer findes der nemlig i Almindelighed 2 Par congruente sammenhørende Punktrækker. Bæreren for en Punktrække, der under Bevægelsen forbliver congruent med sig selv, maa være en Wallace's Linie for Centraltrekanten; Banenormalerne til alle dens Punkter, altsaa ogsaa de 3 vinkelrette paa Centraltrekantens Sider i disses Skæringspunkter med Linien, skulle nemlig gaa igjennem ét Punkt. Dette Punkt maa da være Brændpunkt, og Linien Toppunktstangent for den Parabel, som Linien indhyller under den fortsatte lineære Bevægelse.

Vi have bevist, at enhver ret Linie vil være Bane for ét og kun ét af sine Punkter (undtagen Centrallinierne). Den uendelig fjærne Linie maa da ogsaa være Bane for ét af sine Punkter. Dette kan findes ved at lægge et Keglesnit gjennem Bevægelsens Centralpunkter, et vilkaarligt Punkt D og det uendelig fjærne Punkt for dettes Banelinie. Dette Keglesnits andet uendelig fjærne Punkt vil da være det søgte. Enhver Linie gjennem dette uendelig fjærne Punkt vil være Bærer for en Punktrække, der bevæger sig ligedannet med sig selv. Blandt disse Linier maa da ogsaa den Linie findes, hvis Punktrække ikke forandres. Den skal opfylde den Betingelse at være Toppunktstangent til den Parabel, den indhyller under den fortsatte Bevægelse. Indskriver man altsaa en Parabel i Centraltrekanten saaledes, at dens Axeretning er vinkelret paa det fundne Parallelbundt, da vil denne Parabels Toppunktstangent være den søgte Linie. Vi have da bevist, at *ved enhver uendelig lille Forskydning af en plan Figur med constant Projectivitetssammenhæng*

findes der én Punktrække, der ikke forandres ved Forskydningen.

En almindelig infinitesimal projectiv Bevægelse kan altsaa opløses i en Rotation (med Uforanderlighed i Figuren) og en perspectivisk Bevægelse, og det kun paa én Maade. Perspectivcentret for den sidste Bevægelse og Rotationscentret ere diametralt modsatte Punkter paa Centraltrekantens omkrevne Cirkel, og Rotationscentrets tilsvarende Wallace's Linie er Homologiaxe for den perspectiviske Bevægelse Perspectivcentrets Liniebundt vil bevæge sig congruent med sig selv. Alle Punkter paa Centraltrekantens omskrevne Cirkel have deres absolute Bevægelse rettet mod Perspectivcentret, og dette er Brændpunktet i den Parabel, som den i Øjeblikket uendelig fjærne Linie indhyller under den til den givne infinitesimale Forskydning svarende lineære Bevægelse.

35. Vi antage nu atter, at en projectiv Bevægelse er given ved Fluxionerne AA_1, BB_1, CC_1 og DD_1 for de 4 Punkter A, B, C og D. Vi ville bestemme den Rotation og den perspectiviske Bevægelse, hvori den kan opløses. Man opsøger da Banerne for de uendelig fjærne Punkter paa Linierne AB, BC, CD og DA. Disse 4 Baner berøre en Parabel, hvis Brændpunkt F_1 netop er Centrum i den søgte perspectiviske Bevægelse. F_1 kan da findes som Skæringspunkt mellem 2 Cirkler, omskrevne hver om en Trekant begrænset af 3 af de 4 Parabeltangenter. Derpaa tegnes F_1's Banenormal, og dennes Centralpunkt F vil da være det søgte Rotationscentrum. Wallace's Linier for F og F_1 skulle staa vinkelret paa hinanden, og da den sidste er bestemt som Forbindelseslinie mellem Projectionerne af F_1 paa 2 af de 4 Tangenter, der bestemte den omtalte Parabel, hvori F_1 er Brændpunkt, saa kan man ogsaa finde den første, Homologiaxen i den perspectiviske Bevægelse, naar man blot kjender et af dens Punkter. Et saadant kan f. Ex. findes ved at bestemme det Punkt paa FF_1, der foruden F_1 har FF_1 til Banenormal i den absolute Bevægelse. Man kan nu opløse A's Fluxion i 2 andre, én, der gaar i Retningen AF_1, og en

anden, der staar vinkelret paa AF. Derved ere Rotationen og den perspectiviske Bevægelse nu fuldstændig bestemte.

Har man fundet den Linie c, hvis Punktrække ikke forandres ved Forskydningen, da kan man finde Fluxionen for et vilkaarligt Punkt M enten ved at bestemme dets Fluxioner i de to Bevægelser: Rotationen og den perspectiviske Bevægelse, eller man kan drage MA og MB til Skæring i P og Q med c. P's og Q's Fluxioner bestemmes alene ved Rotationen, og man har nu tilstrækkeligt til at finde Fluxionslinierne for MA og MB med Hensyn til M. Skæringspunktet mellem disse Fluxionslinier er da M's Fluxionspunkt.

36. En lineær Bevægelse er given ved Centraltrekanten ABC samt Banen d for et Punkt D; paa en vilkaarlig Linie p gjennem D ligger en Punktrække DEFGH . . . De tilsvarende Banelinier d, e, f, g, h . . . . skære BC i en Punktrække $D_1E_1F_1G_1H_1$ . . . ., som maa være projectiv med Rækken DEFGH . . . .; da nu ethvert Punkt paa AE har sin Bane gaaende gjennem E_1 (27), og noget tilsvarende gjælder om Punkterne paa AF, AG . . . ., saa kan man heraf udlede følgende Sætning om den lineære Bevægelse:

Det Liniebundt, der har Toppunkt i ét af Centralpunkterne A, og som afbilder en vilkaarlig Punktgruppe i den bevægede Figur, vil være projectivt med Skæringspunktrækken mellem den modstaaende Centralline BC og det til Punktgruppen svarende Banesystem.

37. Vi have set, at den infinitesimale Bevægelse af en plan Figur (i sin Plan) med constant Projectivitetssammenhæng er bestemt, naar 4 Punkters Fluxioner ere givne. Vi ville nu undersøge de Tilfælde, hvor kun Bevægelsens Retning er given for et vist Antal Punkter. Vi faa da følgende Sætninger:

I. *Naar 2 Punkter af Figuren ligge fast, og 3 andre Punkter beskrive rette Linier, da er Bevægelsen lineær.* Man kan nemlig, idet de faste Punkter ere A og B, de bevægelige P, Q og R, finde ét, og kun ét, saadant Punkt C, at C (ABPQR)

$\overline{\wedge}$ ($ABP_1Q_1R_1$), idet P_1, Q_1 og R_1 antages at være Skæringspunkterne mellem AB og Banerne for henholdsvis P,Q og R. Tages nu ABC til Centraltrekant for en lineær Bevægelse, hvor P beskriver PP_1, da ville Q og R netop beskrive QQ_1 og RR_1 (36).

II. *Naar ét Punkt A ligger fast, og 5 andre Punkter P,Q,R,S og T beskrive rette Linier, henholdsvis p,q,r,s og t, da vil ethvert andet Punkt ogsaa beskrive en ret Linie, saa at Bevægelsen er lineær.*

Man kan altid finde en Linie a, der skærer p,q,r,s og t saaledes, at Liniebundtet A(PQRST) er projectivt med Punktrækken a(pqrst). Der gives i Almindelighed kun én Løsning; det Tilfælde, hvor der findes uendelig mange, ville vi foreløbig se bort fra. Antage vi nu, at Linien a skæres af Liniebundtet A(PQRST) i Punktrækken ($P_1Q_1R_1S_1T_1$), da kunne vi finde de to fælles Punkter B og C for denne og den dermed projective Række a(pqrst).

Vælger man nu ABC til Centraltrekant for en lineær Bevægelse, hvor P gjennemløber p, da vil denne Bevægelse i Følge 36 falde sammen med den givne.

III. *Naar 7 Punkter beskrive rette Linier, da er Bevægelsen lineær* (forudsat, at den virkelig er bestemt ved de opgivne Betingelser).*)

Lad de 7 Punkter være A, B, C, D, E, F, og G, og deres tilsvarende Baner henholdsvis a, b, c, d, e, f og g. Vi lade foreløbig A og B ligge fast i vilkaarlige Stillinger (paa a og b), medens C, D, E, og F lægges ind paa henholdsvis c, d, e og f; dette kan udføres i Følge I. G kommer da i en bestemt Stilling, der i Almindelighed ikke ligger paa g. Lade vi nu B ligge fast, medens A efterhaanden indtager Stillingerne A_1, A_2, A_3 . . . (paa a), idet C, D, E og F stadig ere bundne til Linierne c, d, e og f, da vil G gjennemløbe Punktrækken $G_1G_2G_3$ . . ., pro-

*) Denne Sætning er bevist af Schröter (Crelle's Journal, 62 Bd., S. 224).

jectiv med $A_1A_2A_3$ . . . (i Følge II). Holdes A fast i Stillingen A_1, medens B, C, D, E og F ligge paa henholdsvis b, c, d, e og f, da vil G_1 beskrive en ret Linie g_1; holdes A fast i A_2 paa lignende Maade, da vil G_2 gjennemløbe Linien g_2 o. s. v. Vi ville bevise, at Linierne g_1, g_2, g_3 . . . danne et Bundt; g_1 og g_2 skære hinanden i S. Man vil da ved at lægge G i S kunne faa A, B, C, D, E og F til at ligge paa henholdsvis a, b, c, d, e og f i 2 Stillinger. Men heraf følger (II), at naar G lægges fast i S, da vil Gruppen ABCDEF kunne lægges paa det tilsvarende Banesystem paa uendelig mange Maader; g_3 maa da ogsaa gaa gjennem S. Linierne $g_1g_2g_3$ . . . danne altsaa et Bundt, der maa være projectivt med Rækken $A_1A_2A_3$ . . . Nu faar man imidlertid ved at overskære Bundtet $g_1g_2g_3$ . . . med g netop de Stillinger af G paa g, der svare til Stillingerne $A_1A_2A_3$ . . . for A.

Vi have altsaa bevist:

Naar 7 Punkter af en Figur med constant Projectivitetssammenhæng beskrive rette Linier, da ere de gjennemløbne Punktrækker projective.

Betragtes nu 3 af disse Punktrækker, da vil der være 3 Linier, der hver overskære dem i sammenhørende Punkter. Disse 3 Linier ville da i Følge 24 indeholde sammenhørende Punkter af alle 7 Punktrækker. Bestemmes nu en lineær Bevægelse saaledes, at de omtalte 3 Linier blive Centrallinier, medens Punktet A gjennemløber a, da vil denne Bevægelse netop medføre, at B, C, D, E, F og G bevæge sig paa henholdsvis b, c, d, e, f og g ɔ: den er den samme som den givne.

Vi have her tillige løst Projectivitetsproblemet*) med følgende Resultat:

Naar 7 Punkter og 7 der igjennem gaaende Linier ere givne, da vil der altid existere 3 Punkter X, Y og Z (2 af dem kunne

*) Sturm: Das Problem der Projectivität. Math. Ann. Bd. I. S. 533.

dog være conjugert imaginære) saaledes beskafne, at det Liniebundt, der faas ved at forbinde et vilkaarligt af de 3 Punkter, X, med de 7 givne Punkter, er projectivt med den Punktrække, man faar ved at overskære de to andres Forbindelseslinie, YZ, med de 7 givne Linier.

Projectivitetsproblemet i udvidet Forstand kommer ogsaa til at spille en vis Rolle her, og da Beviserne let kunne føres i nær Sammenhæng med nærværende Undersøgelser skulle vi meddele dem.

38. Betragte vi 8 Punkter A, B, C, D, E, F, X og Y af en plan Figur, der bevæger sig med en constant Projectivitetssammenhæng, og lader man de 6 første ligge paa bestemte rette Linier, da vil, naar X ligger fast, Y ogsaa falde i en ganske bestemt Stilling, og omvendt. Lader man X gjennemløbe en ret Linie, da vil Y ogsaa beskrive en ret Linie saaledes, at de 2 Punktrækker ere projective. Man slutter heraf:

Naar 6 Punkter beskrive rette Linier, da ville 2 andre Punkter gjennemløbe collineære Figurer i Planen, medens en Linie og et Punkt gjennemløbe qvadratisk-reciproke Figurer.

Vi antage nu, at de 6 Punkter A, B, C, D, E og F beskrive de rette Linier a, b, c, d, e, og f; et nyt vilkaarligt Punkt X vil da kunne gjennemløbe enhver Linie i det Bundt (x), der har Toppunktet X. Et andet Punkt Y vil gjennemløbe en Linie i det Bundt (y), der har Y til Toppunkt. Men de sammenhørende Baner x og y skulle være saaledes beskafne, at Bundterne (x) og (y) ere projective. Finder man altsaa et saadant Punkt Y i Planen, at det har samme Bane, hvad enten X gjennemløber den ene eller den anden af to forskjellige Linier i Bundtet (x), da vil den samme Bane gjennemløbes af Y for en vilkaarlig Bevægelse af X. Dette indses ogsaa derved, at naar den paagjældende Bane for Y kaldes y, da vil Banesystemet (abcdefy) ikke bestemme Bevægelsen af Punktsystemet (ABCDEFY), altsaa vil Y altid gjennemløbe y, naar blot A, B, C, D, E og F ligge paa henholdsvis a, b, c, d, e og f.

Naar altsaa 6 Punkter beskrive rette Linier, da ville alle de Punkter, hvis Baner ere de samme i to af de mulige lineære Bevægelser, beskrive bestemte rette Linier. Nu er det bekjendt, at naar man har 3 collineære Figurer i samme Plan, da vil der være uendelig mange Punkter i den ene, som ligge paa ret Linie med deres tilsvarende Punkter i de to andre Figur. De omspurgte Punkter ligge alle paa en Curve af 3. Orden, medens Forbindelseslinierne mellem Punkterne og deres tilsvarende Punkter i de to andre Figurer indhylle en Curve af 3. Klasse.

Vi have altsaa bevist følgende Sætning:

Naar 6 Punkter af en plan Figur med constant Projectivitetssammenhæng beskrive rette Linier, da vil der være uendelig mange Punkter, beliggende paa en Curve af 3. Orden φ, *som af sig selv beskrive rette Linier; disse indhylle da en Curve af 3 Klasse* ψ. *Curven* φ *vil endvidere være geometrisk Sted for alle Centralpunkterne i de mulige lineære Bevægelser, medens Curven* ψ *er Indhyllingscurve for de tilsvarende Centrallinier.*

Den sidste Del af Sætningen følger deraf, at Curven φ stadig gaar gjennem Fællespunkterne for 2 og 2 af de collineære Figurer, der bestemme den, medens ψ berører de tilsvarende Fælleslinier.

39. Vi ville nu bevise en Sætning, der oprindelig i en noget anden Form er opstillet af Clebsch*) og senere bevist af Sturm**): *Naar 5 Punkter af en Figur med uforanderlig Projectivitetssammenhæng beskrive rette Linier, da vil af sig selv endnu ét Punkt beskrive en bestemt ret Linie.*

Punkterne antages at være A, B, C, D og E, og de tilsvarende Baner a, b, c, d og e. Ethvert Punkt paa Keglesnittet gjennem A, B, C, D og E kan være Centralpunkt for en af de mulige lineære Bevægelser, og den modstaaende Centrallinie bliver da i Almindelighed den samme, hvilket Punkt

*) Math. Ann. Bd. VI. S. 205.

**) Math. Ann. Bd. XXII. S. 569.

paa Keglesnittet vi end have valgt. Denne Linie kaldes l. Er nu l Bane for Punktet P i en vilkaarlig af de mulige Bevægelser, hvis ene Centralpunkt O er valgt vilkaarlig, da vil Linien PO indeholde 4 Punkter (nemlig O, P og dens to Skæringspunkter med Keglesnittet), der alle kunne være Centralpunkter for lineære Bevægelser, der lade A, B, C, D, E og P glide paa Linierne henholdsvis a, b, c, d, e, og l. Men saa ville alle Punkter paa OP kunne benyttes som Centralpunkter i saadanne Bevægelser (38). Paa denne Maade indses det da, at man kan vælge Centralpunktet aldeles vilkaarlig og lade A, B, C, D og E beskrive de givne Baner, da vil P af sig selv gjennemløbe l. Dermed er Sætningen bevist.

40. I det Tilfælde, hvor man har givet 5 Punkter med Banelinier, vil der til et valgt Centralpunkt C i Almindelighed svare en ganske bestemt modstaaende Centrallinie c. Den én-éntydige Forbindelse mellem de 2 af C og c gjennemløbne Figurer ville vi undersøge ved at tage en Figur, der er reciprok til c's Figur.

Man faar da følgende:

2 Systemer af 5 Punkter, M, N, P, Q, R og M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1 ere givne. Til ethvert Punkt A i Planen svarer da én-éntydig et Punkt A_1 saaledes, at

$$A(MNPQR) \overline{\wedge} A_1(M_1N_1P_1Q_1R_1).$$

Vi kalde de 2 Figurer Σ og Σ_1 og betegne, at A i Σ svarer til A_1 i Σ_1, ved at sige, at Σ (A) svarer til Σ_1 (A_1). Der gives Undtagelser fra den én-éntydige Forbindelse; Σ (M) svarede saaledes til et helt Keglesnit i Σ_1, og ligesaa de andre givne Punkter. Endvidere vil det Punkt S, for hvilket S(MNPQR) $\overline{\wedge}$ $(M_1N_1P_1Q_1R_1)$*), svare til alle Punkter paa det Keglesnit, der gaar gjennem M_1, N_1, P_1, Q_1 og R_1. Paa samme Maade faas

*) Ved $(M_1N_1P_1Q_1R_1)$ forstaas den Projectivitetssammenhæng, som man faar ved at afbilde Punktgruppen $M_1N_1P_1Q_1R_1$ fra et vilkaarligt Punkt paa det Keglesnit, der gaar gjennem disse Punkter.

et Punkt S_1 hørende til Gruppen $M_1N_1P_1Q_1R_1$. Vi ville nu bevise, at der til en ret Linie l i Σ i Almindelighed svarer en Curve i Σ_1, der skæres af en vilkaarlig Linie i 5 Punkter. I det $\Sigma(A)$ beliggende paa l svarer til Σ_1 (A_1), kan man flytte Figuren lAMNPQR collineært til en saadan Stilling, at A, M, N og P falde i henholdsvis A_1, M_1, N_1 og P_1; l falder da i Stillingen l_1, og Q og R faa de nye Stillinger Q_2 og R_2. Q_1Q_2 og R_1R_2 skulle skære hinanden paa l_1 i Punktet A_1. Lader man nu Q_2 flytte sig, da vil R_2 gjennemløbe en Figur collineær med Q_2's Figur, og samtidig vil l_1 gjennemløbe en med denne qvadratisk-reciprok Figur. Vi kunne da bestemme 2 saadanne med Punktsystemet (R_2) collineære Punktsystemer (R_3) og (R_4), at Linien l_1 stadig er identisk med R_3R_4. Endvidere vil Skæringspunktet T_2 mellem Q_1Q_2 og R_1R_2 danne en Figur, der er qvadratisk forbunden med Figuren (Q_2); til ethvert T_2 svarer nemlig et bestemt Q_2, og omvendt, og lader man T_2 gjennemløbe en ret Linie, da vil Q_2 gjennemløbe et Keglesnit.

Vi have da følgende Opgave:

2 collineære Figurer og en dermed qvadratisk forbunden Figur ere givne. Find det geometriske Sted for de Punkter i den sidste, der ligge paa ret Linie med de tilsvarende Punkter i de to første Figurer.

Lader man T_2 gjennemløbe en vilkaarlig ret Linie p, da ville R_3 og R_4 beskrive Keglesnit saaledes, at Punktrækkerne (T_2), (R_3) og (R_4) ere projective. Vi ville nu undersøge, hvor mange af Punkterne T_2 (paa p) der ligge paa ret Linie med deres tilsvarende Punkter R_3 og R_4. Forbindelseslinierne T_2R_3 indhylle en Curve af 3. Klasse med p til Dobbelttangent, og Linierne T_2R_4 indhylle en anden Curve af 3. Klasse med p til Dobbelttangent. De 2 Curver have 9 Fællestangenter, hvoraf 4 falde i p; der bliver altsaa 5 brugelige Løsninger. Vi have altsaa nu vist, at de søgte Punkter ere saaledes fordelte i Planen, at der i Almindelighed findes 5 paa enhver ret Linie i Planen. At de danne en continuert Punktrække ɔ: en Curve, bevises

ved, at naar A faar en endelig Fluxion, faar A_1 ogsaa en endelig Fluxion (se neden for).

Forbindelsen mellem de to Figurer Σ og Σ_1 har altsaa den Egenskab, at der til en ret Linie i Σ i Almindelighed svarer en Curve af 5. Orden i Σ_1. Denne Curve faar 6 Dobbeltpunkter, nemlig M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1 og S_1. Det sidste indsés derved, at der paa l findes 2 Punkter, der svare til hvert af de 6 Punkter.

41. Vi ville nu vise, at den i 40 omtalte Curve af 5. Orden er fuldstændig bestemt, naar man kjender de 6 Dobbeltpunkter M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1 og S_1 samt endnu 2 Punkter A_1 og B_1 paa Curven. Vi vælge da M, N, P og Q vilkaarlig i Planen og bestemme R saaledes, at $(NMPQR) \overline{\wedge} S_1(M_1N_1P_1Q_1R_1)$. R er da éntydig bestemt. Man opsøger derpaa de Punkter A og B, der opfylde Betingelserne:

$$A(MNPQR) \overline{\wedge} A_1(M_1N_1P_1Q_1R_1) \text{ og}$$
$$B(MNPQR) \overline{\wedge} B_1(M_1N_1P_1Q_1R_1).$$

Linien AB vil da svare til den søgte Curve paa den i 40 angivne Maade, og man kan da finde saa mange Punkter af Curven, som man vil. Man kan ogsaa construere Tangenten til et vilkaarligt Punkt af Curven, men før vi angive denne Construction, ville vi bevise en Sætning om en uendelig lille Forskydning af et Keglesnit.

42. Vi antage, at 6 Punkter A, B, C, D, E og F ligge paa et Keglesnit. Dette kan da underkastes en infinitesimal Forskydning ved, at de 5 Punkter A, B, C, D og E faa Fluxionerne henholdsvis AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 og EE_1. Vi ville da bevise, at F's Fluxionspunkt skal ligge paa en bestemt ret Linie parallel med Keglesnittets Tangent i F. AF og CD skære hinanden i X, AB og DE i Y, og BC og EF have Skæringspunktet Z; X, Y og Z skulle da ligge paa en ret Linie, og denne Egenskab skal bibeholdes under Forskydningen. X's Fluxionspunkt X_1 skal ligge paa Fluxionslinien x for CD med Hensyn til X, Y's Fluxionspunkt Y_1 er bestemt, medens Z's

Fluxionspunkt Z_1 skal ligge paa BC's Fluxionslinie z med Hensyn til Z. Vælge vi X_1 paa x, da er Z_1 ogsaa bestemt, saa at Punktrækken (X_1) paa x er ligedannet med Punktrækken (Z_1) paa z.

Sammenhørende Fluxionslinier for FZ og FX med Hensyn til F ville da danne 2 projective Parallelbundter saaledes, at disse Bundter skæres af en vilkaarlig ret Linie i ligedannede Punktrækker. F_1 maa derfor ligge paa en bestemt ret Linie f. Denne Linie maa være parallel med Keglesnittets Tangent i F, da den maa have 2 Punkter tælles med Tangentens Fluxionslinie med Hensyn til F. Vi ville kalde f Keglesnittets Fluxionslinie med Hensyn til F. Har man nu 2 Keglesnit, hvis ene Skæringspunkt S er bekjendt, og man underkaster Curverne bestemte uendelig smaa Forskydninger, da vil Fluxionspunktet for S kunne bestemmes som Skæringspunkt mellem Keglesnittenes Fluxionslinier med Hensyn til S.

Man kan bevise, at naar en vilkaarlig Curve underkastes en infinitesimal Forskydning, da vil et almindeligt Punkt P paa Curven have sit Fluxionspunkt paa en ret Linie p $\neq$ Curvens Tangent i P; p kaldes da Curvens Fluxionslinie med Hensyn til P og bliver identisk med Tangentens Fluxionslinie med Hensyn til dette Punkt.

Antages Punktet P paa den givne Curve c at have den consecutive Stilling P' paa c', medens Tangenten til c' i P' kaldes p', da vil man faa alle mulige Fluxionspunkter for P (svarende til en vilkaarlig Flytning af P over paa Curven c') ved at multiplicere c' med Størrelsen **E** med Hensyn til P. Ved denne Multiplication faa dog kun de Punkter paa c', der ligge uendelig nær ved P', noget at betyde. Men da en Linie gjennem P i en uendelig lille Afstand fra P' vil skære c' og p' i Punkter, hvis Afstand er uendelig lille af 2. Orden, kan man under den omtalte Multiplication erstatte c' med p', og derved er Sætningen bevist.

43. Vi ville nu construere Tangenten til den i 41 bestemte Curve af 5. Orden. Vi antage altsaa at have givet 2 Systemer

af 5 Punkter, (MNPQR) og $(M_1N_1P_1Q_1R_1)$. Et Punkt A er givet, og man bestemmer A_1 saaledes, at

$$A(MNPQR) \barwedge A_1(M_1N_1P_1Q_1R_1).$$

Naar nu A faar Fluxionen AF, hvilken Fluxion faar da A_1? A_1 selv bestemmes som Skæringspunkt mellem 2 Keglesnit, φ og ψ, i det φ gaar gjennem M_1, N_1, P_1 og Q_1 og er bestemt som geometrisk Sted for et Punkt X, der opfylder Betingelsen:

$$A(MNPQ) \barwedge X(M_1N_1P_1Q_1);$$

ψ gaar gjennem Punkterne N_1, P_1, Q_1 og R_1 og er bestemt som geometrisk Sted for et Punkt Y, der opfylder Betingelsen:

$$Y(N_1P_1Q_1R_1) \barwedge A(NPQR).$$

Naar nu A faar Fluxionen AF, da ville φ og ψ faa bestemte uendelig smaa Forskydninger; det gjælder da om at bestemme de to Keglesnits Fluxionslinier med Hensyn til A_1. Bundtet A(NPQR) overskæres med Linien NP, saa at man faar de 4 Punkter N, P, Q_2 og R_2. Giver man nu A Fluxionen AF, da blive N og P liggende, medens Q_2 og R_2 faa Fluxioner, der ere bestemte i Følge 3. Q_2 og R_2 faa da de consecutive Stillinger Q'_2 og R'_2. Paa lignende Maade overskæres Bundtet $A_1(N_1P_1Q_1R_1)$ med N_1P_1, saa at man faar de 4 Punkter N_1, P_1, Q_3 og R_3. Nu er

$$(NPQ_2R_2) \barwedge (N_1P_1Q_3R_3);$$

lade vi da N_1, P_1 og Q_3 ligge fast, da kunne vi bestemme en saadan Fluxion for R_3, at

$$(NPQ_2'R_2') \barwedge (N_1P_1Q_3R_3').$$

Fluxionen for R_3 bestemmes ved at lægge den første Punktgruppe $(NPQ_2'R_2')$ saaledes, at N falder i N_1. PP_1 er da en bestemt Linie, og $Q_2'Q_3$ er bestemt ved Q_2's bekjendte Fluxion. Skæringspunktet O' (Perspectivcentret for de 2 Punktgrupper) mellem PP_1 og $Q_2'Q_3$ fremstilles da ved en bestemt Fluxion, og da nu O', R_2' og R_3' skulle ligge paa en ret Linie, da kan Fluxionen for R_3 ogsaa findes.

Skæringspunktet mellem $R_3'R_1$ og Q_3Q_1 fremstilles ved en Fluxion, der findes i Følge 3. Men denne Fluxion er netop en

af de for A_1 mulige Fluxioner (m. H. t. Keglesnittet ψ). Man kan altsaa nu bestemme Fluxionslinien for ψ med Hensyn til A_1, og paa ganske lignende Maade bestemmes φ's Fluxionslinie.

Skæringspunktet F_1 mellem de to Fluxionslinier er da Fluxionspunkt for A_1, og A_1F_1 er den søgte Tangent. Forudsat at hverken A eller A_1 falder uendelig fjærnt, vise de angivne Constructioner, at A og A_1 samtidig faa endelige Fluxioner ɔ: naar A gjennemløber en continuert Punktrække, da er dette ogsaa Tilfældet med A_1.

44. Vi ville nu undersøge en ret Linies projective Bevægelse med Hensyn til Krumningen af Punkternes Baner. Naar en ret Linie, hvis Punktrække har constant Projectivitetssammenhæng, bevæger sig saaledes, at 4 af dens Punkter beskrive Baner med bekjendt Krumning, da er Bevægelsen bestemt saaledes, at man kan finde Krumningen for ethvert Punkts Bane; vi skulle nu vise, hvorledes dette udføres.

Lad A, B, C og D være de 4 Punkter, (A), (B), (C) og (D) deres resp. Baner. Vi betragte de 2 consecutive Stillinger (A′B′C′D′) og (A″B″C″D″). Banetangenterne AA′, BB′, CC′, DD′ o. s. v. kunne vises at danne en Liniefigur, der er collineær med den Figur, der dannes af de consecutive Tangenter: A′A″, B′B″, C′C″, D′D″ o. s. v. De to Liniegrupper ere nemlig projective Tangentsystemer til to Keglesnit. Kaldes nu Banetangenterne til A, B, C, D og et vilkaarligt Punkt X paa Linien henholdsvis a, b, c, d og x, medens de consecutive Stillinger betegnes med a′, b′, c′, d′ og x′, da vil man altsaa have, at Figurerne (abcdx) og (a′b′c′d′x′) ere collineære. Giver man nu A Fluxionen AA_1 paa a, da ville B, C, D og X faa Fluxioner BB_1, CC_1, DD_1 og XX_1, som kunne bestemmes ved først at opsøge Centralpunktet for den bevægelige Linie, som vi ville kalde l. Dette Centralpunkt O kan findes som det Punkt, hvor det Keglesnit, der tangerer a, b, c, d og l, berører l. Da nu Krumningerne for (A), (B), (C) og (D) ere givne,

kan man i Følge 6 bestemme de uendelig smaa Forskydninger for Linierne a, b, c og d. Vi have nu følgende Opgave: Naar en Figur bevæger sig med constant Projectivitetssammenhæng saaledes, at 4 Linier a, b, c og d faa uendelig smaa Forskydninger, givne paa sædvanlig Maade, hvorledes bestemmes da den tilsvarende Forskydning af en Linie x i Figuren? Opgaven reduceres ved 7 til det i 32 behandlede Problem, og vi skulle derfor ikke gjøre den til Gjenstand for nogen speciel Behandling.

Naar nu x's uendelig lille Bevægelse er bestemt, da faas Krumningscentrum for (X) ved Hjælp af Methoden i 6. Den omtalte infinitesimale projective Bevægelse, der fører a, b, c og d over i Stillingerne a', b', c' og d', kan ogsaa benyttes til at finde Krumningen for l's Indhyllingscurve. l har Centralpunkt O; alle Linier gjennem dette Punkt ville have deres Centralpunkter (med Hensyn til den omtalte Bevægelse) paa et Keglesnit; dette vil berøre l i O og desuden gaa gjennem Centralpunktet O' for l's consecutive Stilling l'; altsaa vil det have samme Krumning som Indhyllingscurven for l.

Vi skulle dog endnu give en anden Løsning af dette Problem; det gjælder om at bestemme Fluxionen OO_1 for O, idet A faar Fluxionen AA_1. For at bestemme O' skulle vi lægge et Keglesnit, der tangerer a', b', c', d' og l', og bestemme dets Røringspunkt med l'. Dette udføres ved Brianchon's Sætning paa sædvanlig Maade: Man søger Skæringspunkterne N' mellem d' og a', P' mellem a' og b', Q' mellem b' og c', C' mellem c' og l' samt D' mellem l' og d'; alle disse Punkter blive fremstillede ved Fluxioner, som findes i Følge 7. C' og D' blive fremstillede ved de i Forvejen bekjendte Fluxioner CC_1 og DD_1. Man søger nu Skæringspunktet U' mellem N'C' og Q'D'; dette bliver atter fremstillet ved en vis Fluxion. Endelig bestemmes Skæringspunktet mellem P'U' og l'. Dette Punkt fremstilles da netop ved den søgte Fluxion OO_1, og nu kan man ved 6 bestemme den søgte Krumningsradius.

45. Naar en Figur med constant Projectivitetssammenhæng bevæger sig i sin Plan, og man kjender Tangenterne til Banerne for 7 Punkter, da vil Banetangenten for ethvert andet Punkt være bestemt (37 III). Antages det altsaa, at de 7 Punkters Bevægelse er saaledes bestemt, at man kjender Fluxionen for det ene tillige med de 6 andres Bevægelsesretninger, da kan man finde alle Fluxionerne. Kaldes de 7 Punkter A, B, C, D, E, F og G, kjender man altsaa Fluxionen AA_1 (paa Linien a) samt Banerne b, c, d, e, f og g for de andre Punkter.

Den Opgave, der skal løses, er da, at lægge den givne Projectivitetssammenhæng (ABCDEFG) saaledes, at A falder i A′, medens B, C, D, E, F og G skulle ligge paa Linierne henholdsvis b, c, d, e, f og g. Vi lade da foreløbig B ligge fast og lægge Projectivitetssammenhængen (ABCDEF) saaledes, at A falder i A′, B ligger fast (paa b), medens C, D, E og F skulle ligge paa Linierne c, d, e og f.

Lægger man Gruppen (ABCD) i Stillingen (A′BCD), da vil E komme i en consecutiv Stilling E′, fremstillet ved en Fluxion, der kan findes i Følge 27. Vi have da Gruppen (ABCDE) i Stillingen (A′BCDE′). Lader man nu A′, B og C ligge fast, medens D gjennemløber d, da vil E′ gjennemløbe en Linie e′, der fremstilles ved Fluxioner i Følge 27. e′ skærer e i Punktet E″. Derved kan man flytte Figuren (ABCDE) til Stillingen (A′BCD′E″), idet D′ ligger paa d, og E″ paa e. I Følge 32 kan man derpaa finde et saadant Punkt F′, fremstillet ved Fluxionen FF_1, saaledes, at Figuren (ABCDEF) og (A′BCD′E″F′) ere collineære. Lader man nu A′ og B ligge fast, medens C, D′, E″ gjennemløbe henholdsvis c, d og e, da vil F′ i Følge 37 I gjennemløbe en ret Linie f′, fremstillet ved Fluxioner. f′ skærer f i et Punkt F″, og man kan derpaa lægge (ABCDEF) i Stillingen (A′BC′D″E‴F″) saaledes, at C′, D″, E‴ og F″ falde paa henholdsvis c, d, e og f. I Følge 32 kan man da finde et saadant Punkt G′, at Figurerne

$$(ABCDEFG) \text{ og } (A'BC'D''E'''F''G')$$

ere collineære.

Lader man nu A' ligge fast, medens B, C', D'', E''' og F'' beskrive Linierne b, c, d, e og f, da vil man ved **37** II kunne bestemme en ret Linie g', hvorpaa G' bevæger sig. Søges nu Skæringspunktet mellem g' og g, da vil dette netop fremstilles ved den søgte Fluxion for Punktet G.

En anden Maade at løse Opgaven paa bestaar deri, at man lægger den givne Projectivitetssammenhæng ind paa de 7 givne Linier i 3 forskjellige Stillinger. Dette kan udføres ved successiv Anvendelse af Theoremerne i **37**. De 7 projective Punktrækker, som gjennemløbes af de 7 Punkter, ere da bestemte, og giver man det ene Punkt en bestemt Fluxion, da kan man finde de andre Fluxioner ved at anvende en af de bekjendte Methoder til Construction af sammenhørende Punkter i projective Punktrækker (jævnfør **43**).

46. *Bestemmelse af Krumningen for Banerne i den almindelige projective Bevægelse.*

Naar man kjender Banekrumningerne for 7 Punkter af en Figur, der bevæger sig i sin Plan med constant Projectivitetssammenhæng, da kan man bestemme Krumningen for et vilkaarligt Punkts Bane. De 7 Punkter ere A, B, C, D, E, F og G; deres Banetangenter ere bekjendte og antages at være a, b, c, d, e, f og g. Har man nu et vilkaarligt Punkt X, da kan dettes Banetangent x bestemmes (**37** III). Giver man A Fluxionen AA_1 paa a, da ville B, C, D, E, F, G og X faa Fluxioner BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1, GG_1 og XX_1, der kunne bestemmes i Følge **45**. Derved kommer Figuren over i den consecutive Stilling $(A'B'C'D'E'F'G'X')$; vi kalde de nye Banetangenter a', b', c', d', e', f' g' og x'.

Figuren $(a'b'c'd'e'f'g'x')$ skal da være qvadratisk-reciprok til (ABCDEFGX). Lægger man en Figur $(A_2B_2 \ldots G_2)$ collineær med $(AB \ldots G)$ ind paa Liniesystemet (abcdefg) i en for øvrigt vilkaarlig Stilling, skal man altsaa kunne underkaste denne nye

Figur en saadan infinitesimal projectiv Forskydning, at A_2 kommer paa a′, B_2 paa b′ o. s. v. samt X_2 paa x′. Da nu Krumningscentrerne ere bekjendte for de 7 givne Punkters Baner, vil man i Følge 6 kunne fremstille a′, b′, c′, d′, e′, f′ og g′ ved Fluxioner. Fluxionslinierne for a, b, c, d, e, f og g med Hensyn til henholdsvis A_2, B_2, . . . G_2 ere da bekjendte.

Man har da følgende Problem:

7 Punkter af en projectiv-uforanderlig, bevægelig plan Figur ere givne; man skal bestemme en saadan infinitesimal Forskydning af Figuren, at Fluxionspunkterne for de 7 Punkter falde hvert paa sin givne Linie.

Vi have her et specielt Tilfælde af den Opgave, at lægge 7 givne Punkter ind paa 7 givne Linier saaledes, at deres Projectivitetssammenhæng ikke forandres; kun ligge Linierne her uendelig nær ved de givne Punkter og ere bestemte ved de i endelig Afstand fra disse beliggende geometriske Steder for Fluxionspunkterne.

Vi benytte da Hovedsætningerne for den lineære Bevægelse i følgende modificerede Skikkelse (idet der stadig er Tale om uendelig smaa Forskydninger af en plan Figur i sin egen Plan og med constant Projectivitetssammenhæng):

1⁰. *Naar 3 Punkters Fluxioner ere givne, og et fjerde Punkts Fluxionspunkt skal ligge paa en given ret Linie, da vil ethvert Punkts Fluxionspunkt ligge paa en til Punktet éntydig svarende Linie.*

2⁰. *Naar 2 Punkter have bekjendte Fluxioner, og 3 andre Punkters Fluxionspunkter skulle ligge paa givne rette Linier, da vil ethvert Punkts Fluxionspunkt ligge paa en bestemt ret Linie.*

3⁰. *Naar ét Punkts Fluxionspunkt ligger fast, medens Fluxionspunkterne for 5 andre Punkter ligge hvert paa sin rette Linie, da vil Fluxionspunktet for et vilkaarligt Punkt ogsaa ligge paa en bestemt ret Linie.*

4⁰. *Naar 7 Punkter have deres Fluxionspunkter paa givne*

rette Linier, da vil et vilkaarligt af Figurens Punkter have sit Fluxionspunkt paa en ved Punktet éntydig bestemt Linie.

Disse Sætninger kræve ikke noget Bevis, da de kun ere Modificationer af de allerede beviste Sætninger i 25 og 37. Vi skulle nu flytte Figuren ($A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2X_2$) saaledes, at de 7 første Punkter faa deres Fluxionspunkter paa de bekjendte Linier a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2; X_2 vil da i Følge Sætning 4⁰ faa sit Fluxionspunkt paa en Linie $x_2 \neq x$; det gjælder nu om at bestemme x_2. Vi vælge da Fluxionerne for A_2, B_2, C_2 og D_2 vilkaarlig, kun saaledes, at Fluxionspunkterne falde paa Linierne henholdsvis a_2, b_2, c_2 og d_2. Derved faar man Figuren i en bekjendt Stilling ($A_2'B_2'C_2'D_2'E_2'F_2'G_2'X_2'$). Lader man nu A_2', B_2' og C'_2 ligge fast, medens Fluxionspunktet D_{21} for D_2 beskriver Linien d_2, da vil E_{21} beskrive en ret Linie, der kan bestemmes i Følge 27, og hvis Skæring med e_2 altsaa kan findes. Nu kan man lægge Figuren i en saadan Stilling, at Fluxionspunkterne for de 5 første Punkter falde paa de rigtige Linier. Man fortsætter da paa samme Maade, idet man nu lader 2 Fluxionspunkter ligge fast. Ved Anvendelse af 2⁰ og 3⁰ i Forbindelse med Constructionerne i 37 (II og III) faar man da til sidst alle de 7 Punkters Fluxionspunkter ind paa de 7 givne rette Linier. X_2 faar da ogsaa et bekjendt Fluxionspunkt X_{21}, og en Linie gjennem dette Punkt og parallel med x vil da være x_2.

Nu kjender man Overgangen fra x til x'. X er nemlig Centralpunkt, og x_2 er Fluxionslinie for x med Hensyn til X_2. Da nu tillige Fluxionen XX_1 er bekjendt, giver Methoden i 6 Krumningsradius for den af X beskrevne Curve.

Ved Hjælp af 44 kan man da ogsaa bestemme Krumningscentret for de Curver, der indhylles af Figurens rette Linier.

Simplere Constructioner kunne faas ved mere specielle Bevægelser. Dersom f. Ex. 6 af de givne Punkter beskrive Curver med Vendepunkt, da kan man anvende Sætningen i 38.

I en almindelig projectiv Bevægelse kan der være Tale om,

at nogle af Figurens Punkter beskrive Vendepunkter. Disse skulle altsaa have den Egenskab at ligge paa ret Linie med deres tilsvarende Punkter i Figurens 2 følgende Stillinger; alle de søgte Punkter ligge da i Almindelighed paa en vis Curve af 3. Orden, medens Vendetangenterne indhylle en Curve af 3. Klasse. Vendepunktscurven vil gaa gjennem de to paa hinanden følgende infinitesimale Bevægelsers Centralpunkter, og Vendetangenternes Indhyllingscurve vil tangere de tilsvarende Centrallinier.

Naar 6 Vendepunkter og de tilsvarende Vendetangenter ere givne, da ere begge Curver bestemte (38).

Naar 5 Vendepunkter og de tilsvarende Vendetangenter ere givne, da kjender man endnu ét Punkt paa Vendepunktscurven tillige med den tilsvarende Vendetangent (39).

IV.

Bevægelse af en plan Figur med constant qvadratisk Figursammenhæng.

47. Vi have tidligere betragtet Bevægelsen af en Figur, der stadig forbliver collineær med en fast Figur (beholder sin Projectivitetssammenhæng); vi skulle nu undersøge Bevægelsen af en Figur, der stadig er qvadratisk forbunden med en fast Figur, *Grundfiguren*, og betegne dette ved at sige, at Figuren bevæger sig med *constant qvadratisk Figursammenhæng*. Man siger ogsaa, at Figuren bevæger sig med *constant qvadratisk Punktsammenhæng* eller *Liniesammenhæng*, eftersom dens Punkter eller Linier svare til Grundfigurens Punkter (eller Linier).

I 38 beviste vi følgende Sætning:

Naar en Figur med constant Projectivitetssammenhæng bevæger sig saaledes, at 6 Punkter beskrive rette Linier, da ville 2 vilkaarlige Punkter beskrive collineære Figurer. Baneelementerne svare da til hinanden i disse Figurer, og da den bevægede Figur og Banefiguren have qvadratisk-reciprok Forbindelse indbyrdes, kan man opstille følgende Sætning:

Naar 8 Punkter A_1, $A_2 \ldots A_8$ ere givne, og de 6 første A_1, $A_2 \ldots A_6$ svare til givne Linier a_1, $a_2 \ldots a_6$ i en qvadratisk-reciprok Forbindelse, da er denne endnu ikke bestemt. Men lader man A_7 svare til en bevægelig Linie a_7, da vil A_8 svare til en anden bevægelig Linie a_8 saaledes, at de to Figurer, der beskrives af a_7 og a_8, ere collineære.

Sætningen kan ogsaa udtales saaledes:

Naar en plan Figur med constant qvadratisk Liniesammenhæng gjennemløber sin Plan saaledes, at 6 Linier ligge fast, da ville alle andre Linier gjennemløbe indbyrdes collineære Figurer. Dog vil der i Følge den sidste Sætning i 38 være uendelig mange Linier, tangerende en vis Curve af 3. Klasse, der ligge fast.

Ved Dualitet faas da følgende Sætning:

Naar en plan Figur bevæger sig i sin Plan med constant qvadratisk Punktsammenhæng saaledes, at 6 Punkter ligge fast, da ville alle andre Punkter gjennemløbe indbyrdes collineære Figurer; dog gives der uendelig mange Punkter, alle beliggende paa en vis Curve af 3. Orden, der ligge fast.

Dersom altsaa et syvende Punkt i Figuren ogsaa beskriver en ret Linie, da ville alle Punkter beskrive rette Linier saaledes, at de gjennemløbne Punktrækker ere projective.

48. Idet vi vende tilbage til den projective Bevægelse og antage, at de 6 Punkter A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 beskrive de rette Linier henholdsvis a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, da er Collineationen mellem de 2 Figurer, der beskrives af 2 andre Punkter X og Y fuldstændig bestemt. Vi ville søge de to Figurers Fællestrekant. X og Y tænkes forbundne med et af de søgte Fællespunkter O for de to Figurer (X) og (Y). Lader man da X gjennemløbe Linien XO, da vil Y beskrive YO, og de beskrevne Punktrækker maa være perspectiviske. Heraf følger, at i denne specielle Bevægelse maa XY dreje sig om et fast Punkt P, og da Bevægelsen i Almindelighed ikke kan være perspectivisk, maa P være et af Centralpunkterne; P ligger da paa den Curve φ af 3. Orden, der er geometrisk Sted for disse, og kan altsaa kun vælges i ét af Linien XY's Skæringspunkter med φ. Kaldes disse Skæringspunkter P_1, P_2 og P_3, og vælges P i P_1, da vil den dertil svarende Bevægelse være saaledes beskaffen, at alle Punkter paa XY have deres Baner gaaende gjennem O. Dette er da ogsaa Tilfældet med P_2 og P_3, og disses Baner, der ligge fast, skære altsaa hinanden i O. Altsaa

vil den søgte Fællestrekants Sider netop være de faste Banelinier for Punkterne P_1, P_2 og P_3.

Vi have da vist følgende Sætning:

De af X og Y gjennemløbne collineære Figurers Fællestrekant dannes af de faste Banelinier for XY's Skæringspunkter med φ; *alle Punkter paa Linien XY beskrive collineære Figurer med de samme Fællespunkter, altsaa danne de til en lineær Punktrække svarende Figurer et lineært Figurbundt.*

En dualistisk tilsvarende Sætning gjælder om den dualistisk tilsvarende Bevægelse.

49. Vi antage nu, at en Figur bevæger sig med constant qvadratisk Punktsammenhæng saaledes, at de 6 Punkter A_1, $A_2 \ldots A_6$ ligge fast, medens 2 andre Punkter X og Y ere bevægelige. Den bevægelige Figur antages at være qvadratisk-reciprok til Grundfiguren. Denne kan da flyttes saaledes, at dens Linier gaa gjennem deres tilsvarende Punkter i den bevægede Figur, idet Flytningen foregaar saaledes, at Grundfigurens Projectivitetssammenhæng ikke forstyrres. Gjennem Punkterne A_1, $A_2 \ldots A_6$ faas saaledes 6 Linier a_1, $a_2 \ldots a_6$, og gjennem X og Y gaa de to Linier x og y. Lade vi nu Figuren $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 xy)$ bevæge sig med constant Projectivitetssammenhæng saaledes, at a_1, $a_2 \ldots a_6$ stadig gaa gjennem Punkterne henholdsvis A_1, $A_2 \ldots A_6$, da ville Linierne x og y beskrive collineære Figurer, og disse ville være de samme som de, der gjennemløbes af X og Y. Alle Linier, der gaa gjennem Skæringspunktet mellem x og y ville i Følge 48 beskrive collineære Figurer med de samme Fællespunkter. Da dette Skærings punkt svarer til et Keglesnit i Figuren $(A_1, A_2 \ldots A_6)$, faas følgende Sætning:

Naar 6 Punkter af en Figur med constant qvadratisk Punktsammenhæng ligge fast, da ville alle Figurens Punkter gjennemløbe Planen collineært. De collineære Figurer, der beskrives af Punkterne paa et Keglesnit, der svarer til et Punkt (eller en ret Linie) i Grundfiguren, have samme Fællespunkter.

Disse kunne bestemmes paa den i 48 angivne Maade.

50. Vi ville nu undersøge Bevægelsen af en Figur med constant qvadratisk Liniesammenhæng, naar 5 Linier ligge fast, og 3 andre Linier dreje sig om faste Punkter.

De 5 faste Linier ere a, b, c, d og e, og de 3 andre p, q og r; de Punkter, hvorom disse dreje sig, kaldes henholdsvis P, Q og R. Den qvadratiske Sammenhæng er bestemt ved de faste Punkter A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, P_1, Q_1 og R_1 svarende til henholdsvis a, b, c, d, e, p, q og r.

Opgaven bestaar nu i at give Figuren $(A_1B_1C_1D_1 \ldots)$ en saadan Bevægelse med constant Projectivitetssammenhæng, at A_1, B_1, C_1, D_1 og E_1 faa Banerne henholdsvis a, b, c, d og e, medens P_1, Q_1 og R_1 skulle beskrive rette Linier gjennem henholdsvis P, Q og R. Vi lægge da først P_1 i P; Q_1 og R_1 samt det vilkaarlige Punkt X_1, skulle da beskrive bestemte projective Punktrækker (Q_1), (R_1) og (X_1) (i Følge 37 II). Lægges dernæst Q_1 i Q, da ville R_1 og X_1 gjennemløbe 2 andre projective Punktrækker $(R_1)'$ og $(X_1)'$. Nu skal man finde et Punkt paa (R_1) og et Punkt paa $(R_1)'$, hvis Forbindelseslinie gaar gjennem R saaledes, at samtidig Forbindelseslinien mellem de tilsvarende Punkter paa (X_1) og $(X_1)'$ bliver Bane for X_1 i den søgte lineære Bevægelse. De for X_1 mulige Banelinier maa altsaa indhylle et Keglesnit, og vi have da Sætningen:

Naar et System af 8 Punkter skal flyttes hen i en saadan Stilling (uden at forandre Projectivitetssammenhængen), at Systemet derefter kan underkastes en lineær Bevægelse, hvor de 5 Punkter faa givne Baner, medens Banerne for de 3 andre Punkter skulle gaa igjennem hver sit givne Punkt, da vil et vilkaarligt Punkt i fast projectiv Forbindelse med de 8 Punkter derved kunne beskrive uendelig mange Baner, der alle ville indhylle et Keglesnit.

Udtrykt paa en anden Maade lyder det fundne Resultat saaledes:

Naar en plan Figur bevæger sig med constant qvadratisk

Liniesammenhæng saaledes, at 5 Linier ligge fast, medens 3 andre Linier dreje sig om faste Punkter, da vil enhver anden Linie i Figuren indhylle et Keglesnit.

Ved Dualitet faas da:

Naar en plan Figur bevæger sig med constant qvadratisk Punktsammenhæng saaledes, at 5 Punkter ligge fast, medens 3 andre Punkter beskrive rette Linier, da ville alle andre Punkter beskrive Keglesnit. I Følge 39 vil der dog være endnu ét Punkt, der ligger fast under Bevægelsen.

Heraf følger da atter et mere almindeligt Resultat:

Naar en plan Figur bevæger sig med constant qvadratisk Punktsammenhæng saaledes, at 5 Punkter ligge fast, og 2 andre Punkter beskrive rette Linier, da ville de Figurer, som gjennemløbes af 2 vilkaarlige Punkter, være indbyrdes qvadratisk forbundne.

Sætningen følger deraf, at i de to Figurer svarer Punkt én-éntydig til Punkt, og ret Linie til Keglesnit.

51. Naar 2 Punktsystemer i Planen ere qvadratisk forbundne med samme tredje Figur, da have de i Almindelighed 6 Fællespunkter. Man ser nemlig, at Opgaven at bestemme saadanne Fællespunkter bliver den samme som den, at finde Punkter, der ligge paa sammenhørende Linier i 4 collineære Figurer; og Antallet af saadanne Punkter vides at være 6 (i Almindelighed). De 6 Fællespunkter ligge dog ikke ganske vilkaarlig, da der ellers i Følge 47 vilde være uendelig mange Fællespunkter. De maa altsaa ligge saaledes, at de 5 bestemme det 6te (50). Som Følge heraf *vil en uendelig lille Forskydning af en Figur, der bevæger sig med constant qvadratisk Figursammenhæng, ikke kunne opfattes som en uendelig lille Bevægelse af den i 47 omtalte Art. Derimod kan den altid opfattes som identisk med den i 50 omtalte Bevægelse.*

Man ser endvidere, at der ikke gives andre endelige Bevægelser end den i 47 nævnte, hvor alle Banerne ere rette Linier.

52. Vi skulle nu løse Hovedopgaven for infinitesimale Forskydninger af en Figur med constant qvadratisk Figursammenhæng: *Bestem Fluxionen for et vilkaarligt Punkt, naar 7 Punkters Fluxioner ere givne.*

De 7 Punkter ere A, B, C, D, E, F og G. Grundfiguren er bestemt ved de tilsvarende 7 Linier a, b, c, d, e, f og g. Fluxionerne for de 7 Punkter ere AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1 og GG_1. Vi skulle nu finde Fluxionen for et Punkt X, hvis tilsvarende Linie i Grundfiguren er x.

Man forskyder da Grundfiguren, idet dens Projectivitetssammenhæng bevares, hen i en saadan Stilling $(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1)$, at a_1 gaar gjennem A, b_1 gjennem B o. s. v.; dette kan i Følge 37 III udføres paa uendelig mange Maader.

Vi skulle nu bevæge Figuren $(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1 x_1)$ saaledes (idet dens Projectivitetssammenhæng bevares), at a_1 gaar gjennem A′ (ɔ: A's consecutive Punkt, bestemt ved Fluxionen AA_1), b_1 gjennem B′ o. s. v. I denne uendelig lille Forskydning faar Linien a_1 en bestemt Fluxionslinie a_F med Hensyn til A, b_1 faar Fluxionslinien b_F med Hensyn til B, o. s. v.

Figuren (ABC . . . G) underkastes da en saadan infinitesimal projectiv Forskydning, at A, B, C, D, E, F og G faa deres Fluxionspunkter paa henholdsvis a_F, b_F, c_F . . . g_F (udføres i Følge 46). Idet vi betragte Linierne a_1, b_1 . . . g_1 som hørende med til den saaledes bevægede Figur (ABC . . . G), kan man finde deres Centralpunkter. Man kan da ogsaa i denne Bevægelse finde Fluxionslinien for x_1 med Hensyn til X. Denne Fluxionslinie skal da indeholde X_1. Idet vi nu foretage endnu en Forskydning af Figuren (ABC . . . G) af samme Art som, men forskjellig fra, den nys nævnte, da vil man faa endnu en ret Linie, hvorpaa X_1 skal ligge, og den søgte Fluxion XX_1 er da fuldstændig bestemt.

53. Den tilsvarende Opgave, hvor man kjender de uendelig smaa Forskydninger af 7 rette Linier i en Figur, der bevæger sig med constant qvadratisk Liniesammenhæng, og skal

bestemme Forskydningen af en vilkaarlig Linie, løses paa ganske lignende Maade:

De 7 Linier kunne være a, b, c, d, e, f og g, og de tilsvarende Punkter i Grundfiguren antages at være A, B, C, D, E, F og G; en Linie x i den bevægede Figur svarer da til et bestemt Punkt X i Grundfiguren.

Vi lægge Projectivitetssammenhængen (ABCDEFG) ind paa Liniegruppen (abcdefg) i 2 forskjellige Stillinger $(A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1)$ og $(A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2)$; X falder derved i henholdsvis X_1 og X_2, og Linien X_1X_2 er identisk med x. Man flytter nu Figuren $(A_1B_1C_1 \ldots G_1)$ med constant Projectivitetssammenhæng over paa den bekjendte Liniegruppe $(a'b'c' \ldots g')$. A_1 skal da have sit Fluxionspunkt paa den bekjendte Fluxionslinie for a med Hensyn til A_1 o. s. v. Opgaven kan da løses ved 46. X_1 faar da en til den betragtede Forskydning svarende Fluxion. Ved en lignende Flytning af Figuren $(A_2B_2C_2 \ldots G_2)$ faar X_2 en Fluxion, som findes ved 46. Da man nu kjender de frie Fluxioner for Linien x i 2 af dens Punkter X_1 og X_2, saa er dens infinitesimale Forskydning fuldstændig bestemt.

54. Man kan ogsaa for at løse Problemerne om infinitesimale Forskydninger af en Figur med constant qvadratisk Figursammenhæng anvende de i 49 og 50 fundne Sætninger.

Ved Hjælp af den i 49 fundne Sætning kan man f. Ex. løse Opgaven: Naar 6 Punkter ligge fast og et 7de Punkt faar en bestemt Fluxion, bestem da den tilsvarende Fluxion for et nyt Punkt. Derpaa kan man løse den samme Opgave, naar de 6 faste Punkter ere fremstillede ved Fluxioner.

V.

Fremstilling af infinitesimale Figurforskydninger i Rummet.

---

54. Uendelig smaa Forskydninger af Punkter i Rummet fremstilles paa ganske den samme Maade som i Planen, ved Fluxioner. Vi betegne ogsaa her et Punkt A's Fluxion ved AA_1, medens det derved fremstillede consecutive Punkt kaldes A'.

Antage vi nu, at 2 Punkter A og B faa Fluxionerne AA_1 og BB_1, da vil den dertil svarende Forskydning af Linien AB til den consecutive Stilling $A'B'$ være bestemt. Idet vi kalde Linien a, dens consecutive Stilling a', da kan et af Liniens Punkter P føres over paa a' ved uendelig mange Fluxioner. P's Fluxionspunkt P_1 skal stadig ligge paa den Linie, man faar ved at multiplicere a' med Størrelsen **E** med Hensyn til P. Den derved fremkomne Linie, som vi kalde a's Fluxionslinie, bliver parallel med a (egentlig med a').

Beviset for, at man faar en saadan Fluxionslinie kan ogsaa føres ved at fremstille a i dobbelt retvinklet Billede. Man indser da, at ethvert Punkts Billede vil faa en Fluxion, der er Billedet af Punktets virkelige Fluxion; Sestraalen bevæger sig nemlig parallel med sig selv (ved Overgangen fra et Punkt til det consecutive), saa at alle dens Punkter svare til én og samme Fluxionslinie, der selv er Sestraale. Det geometriske Sted for Billedet af P's Fluxionspunkt bliver da en Linie $\neq$ a's

Billede, og dermed er Sætningen bevist. For at bestemme Fluxionslinien med Hensyn til P, naar A og B faa Fluxionerne AA_1 og BB_1, kan man betragte en saadan Bevægelse af Liniens Punktrække, at denne forbliver ligedannet med sin oprindelige Stilling. P skal da flyttes i en Plan $\pi \neq AA_1$ og BB_1, og da alle Fluxionspunkterne nu skulle ligge paa en ret Linie, drager man A_1B_1 og søger dens Skæringspunkt P_1 med Planen π; P_1 ligger da paa den søgte Fluxionslinie.

Liniens *Centralpunkt* O er det Punkt paa a, der ligger nærmest ved a', altsaa maa O have den mindste normale Fluxion af alle Punkter paa Linien. Ere AA_1 og BB_1 givne, da kan man finde O paa følgende Maade: Man erstatter først AA_1 og BB_1 med henholdsvis AA_2 og BB_2, idet A_1A_2 og B_1B_2 ere parallele med a, og derpaa søges den korteste Afstand mellem A_2B_2 og a; dennes Fodpunkt paa a er da det søgte Punkt.

55. Vi antage at have givet 3 Punkter A, B og C, der ikke ligge paa samme rette Linie. De bestemme da en Plan α. Giver man nu de 3 Punkter Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1, da maa Planen α' gjennem A', B' og C' være bestemt. Enhver Linie i α gjennem A faar med Hensyn til A en Fluxionslinie gjennem A_1 og $\neq \alpha$. Heraf følger da, at AA_1 kan erstattes med Fluxionen AA_2, idet $A_1A_2 \neq \alpha$, naar det kun gjælder om at beholde den samme Forskydning af α; altsaa:

Naar en Plan α flyttes over i en consecutiv Stilling α', da kan et vilkaarligt Punkt A i α flyttes over i α' paa uendelig mange Maader saaledes, at alle de mulige Fluxionspunkter for A ligge i en Plan $\neq \alpha$; denne Plan kaldes da α's Fluxionsplan med Hensyn til A, medens en vilkaarlig af A's Fluxioncr kaldes en fri Fluxion.

α skærer α' i en ret Linie, der kaldes *Centrallinien* for α. For at finde denne, naar AA_1, BB_1 og CC_1 ere givne, kan man erstatte de givne Fluxioner med AA_2, BB_2 og CC_2 vinkelrette paa α, idet da A_1A_2, B_1B_2 og C_1C_2 maa være parallele

med α. Planen $[A_2B_2C_2]$ vil da skære α i den søgte Centrallinie. A_2B_2 skærer nemlig AB i dennes Centralpunkt (svarende til Fluxionerne AA_2 og BB_2), og A_2C_2 og B_2C_2 skære paa samme Maade henholdsvis AC og BC i disses Centralpunkter; disse maa imidlertid ligge paa den søgte Centrallinie.

Vil man derefter bestemme Fluxionsplanen for α med Hensyn til et vilkaarligt af α's Punkter D, da oprejser man i D en Normal paa α og søger dens Skæringspunkt D_2 med Planen $(A_2B_2C_2)$; en Plan gjennem D_2 og parallel med α er da den søgte Fluxionsplan.

Har man givet Planens Centrallinie tillige med Fluxionen AA_1 for Punktet A, da erstatter man AA_1 med en paa Planen normal Fluxion AA_2. Planen gjennem A_2 og den givne Centrallinie vil da indeholde de til alle normale Fluxioner svarende Fluxionspunkter.

56. En Linie AB's *Længdefluxion* bestemmes paa sædvanlig Maade. Ere Fluxionerne for A og B henholdsvis AA_1 og BB_1, da afsætter man $B_1B_2 \mathrel{\underline{\overline{\#}}} A_1A$. Projectionen af BB_2 ned paa Linien vil da være den søgte Længdefluxion. Beviset føres paa ganske lignende Maade som i Planen og kan for øvrigt bygges alene paa 5, idet man anvender dobbelt retvinklet Afbildning.

Naar et plant Areal faar en uendelig lille Forskydning ud i Rummet, da vil Arealet faa en uendelig lille Forøgelse eller Formindskelse, som vi ville fremstille ved en *Arealfluxion*. Idet vi foreløbig ikke antage andet om denne end, at den er et Maal for den uendelig lille Arealtilvæxt, kunne vi bevise følgende Sætning:

Naar en Trekant ABC bevæger sig frem i Rummet saaledes, at Vinkelspidserne faa Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1, da vil den faa samme Arealfluxion, som den vilde faa ved en Bevægelse i sin Plan saaledes bestemt, at Vinkelspidsernes Fluxioner ere Projectioner af de givne Fluxioner ned paa Planen.

Vi antage først, at A ligger fast, medens B og C faa Fluxionerne BB_1 og CC_1. Centrallinien for Planen [ABC] gaar da gjennem A og antages at være a. Nedlægges nu Trekanten $AB'C'$ i Planen [ABC] omkring a, da faas en Trekant $AB''C''$, som er congruent med $\triangle AB'C'$. BB'' og CC'' ville da repræsenteres ved saadanne Fluxioner BB_2 og CC_2, at $\triangle ABC$ ved Flytning til $\triangle AB''C''$ faar samme Arealfluxion som ved den oprindelige Forskydning. B' og B'' ligge nu paa en Cirkel vinkelret paa Planen [ABC] og med Centrum paa a; ved Multiplication med **E** med Hensyn til B vil denne Cirkel gaa over til en ret Linie gjennem A_1 og $\perp$ Planen [ABC]. Altsaa faas B_2 netop som Projection af B_1 paa Planen. Paa lignende Maade faas C_2, altsaa er Sætningen bevist for det Tilfælde, da A ligger fast. Men det almindelige Tilfælde reduceres let hertil, idet man uden at forandre Trekantens Areal kan underkaste den en Parallelforskydning saaledes, at A ligger fast. Denne Parallelforskydning vil give Trekantens Projection paa Planen en Parallelforskydning bestemt ved Projectionen af A_1A. Men derved komme vi altsaa netop til den opstillede Sætning. Denne kan udvides, saa at den gjælder om enhver plan Figur, idet en saadan, i hvert Fald ved fortsat Deling i det uendelige, kan tænkes sammensat af Trekanter,

57. Vi skulle nu vise, hvorledes man kan fremstille de uendelig smaa Arealændringer ved Fluxioner. Vi betragte da et Rectangel ABCD, og antage, at AB faar Længdefluxionen BB_1, medens AD faar Længdefluxionen DD_1. Det nye Rectangel med Siderne AB' og AD' omdanne vi til et andet, hvis ene Side er AD. Dette kan som bekjendt udføres ved at drage $B'D$ og en Parallel med denne gjennem D' til Skæring i B'' med AB. AB'' vil da være den anden Side i det søgte Rectangel.

Disse Constructioner udføres nu paa følgende Maade: En Linie gjennem $D_1 \neq BD$ skærer CD i D_2; en Linie gjennem

$D_2 \neq DB_1$ skærer AB i B_2. Fluxionen BB_2 repræsenterer da den uendelig lille Længde BB″.

Den søgte Tilvæxt i Areal er da et Rectangel, hvis ene Side er BC, og hvis anden Side er den uendelig lille Længde, der fremstilles ved Fluxionen BB_2.

Vi kunne da sige, at *Arealfluxionen* er et Rectangel med Siderne BC og BB_2, idet man indser, at det er aldeles vilkaarligt, hvilken af disse Sider man opfatter som Fluxion.

Man kan nu bestemme Arealfluxionen for en Trekant, hvis Vinkelspidser have bekjendte Fluxioner (i Trekantens Plan). Den søgte Størrelse vil nemlig være Halvdelen af Arealfluxionen for et Rectangel, hvis ene Side er en af Trekantens Sider, og hvis anden Side er Trekantens tilsvarende Højde, og disse Liniers Længdefluxioner have vi lært at bestemme.

58. Vi ville søge Betingelsen for, at det i 57 betragtede Rectangel beholder sit Areal under Forskydningen.

B_2 skal da falde i B, og er BB_1 given, da kan man finde DD_1 ved gjennem B at drage en Parallel med B_1D til Skæring med CD i D_2. En Linie gjennem $D_2 \neq BD$ vil da skære AD i D_1 (er BB_1 positiv, bliver DD_1 negativ). Men denne Construction kan, da $DD_2 = B_1B$, simplificeres saaledes: Man drager gjennem B_1 en Parallel med BD til Skæring med BC i P; PB vil da angive Længden af den søgte Fluxion.

Har man nu givet en Trekant ABC, der underkastes en saadan Forskydning, at A og B faa de givne Fluxioner AA_1 og BB_1, medens C's Fluxion skal falde paa en given Linie c (gjennem C), da kan man bestemme CC_1 saaledes, at Trekanten Fig. 7.
under Forskydningen har constant Areal. Højden fra C træffer AB i H; afsættes fra B_1 $B_1B_3 \not\equiv A_1A$, og kaldes Projectionen af B_3 paa AB for F_1, da vil BF_1 være Længdefluxion for AB. Man kan da finde Længdefluxionen for CH paa følgende Maade: Man opsøger et Punkt D saaledes, at AHCD et et Parallelogram. Gjennem F_1 drages en Parallel med DB til Skæring i F_2 med den vinkelrette paa AB i B. BF_2 er da Længdefluxion

for CH. Man afsætter nu AA_2 og BB_2 vinkelrette paa AB saaledes, at A_1A_2 og B_1B_2 ere parallele med AB. A_2B_2 skærer CH i H_2 saaledes, at HH_2 er Projectionen af H's Fluxion paa CH. Man drager derpaa en Parallel med c gjennem H_2 til Skæring i C_1' med en Linie gjennem F_2 vinkelret paa BF_2. CC_1 vil da være lig $C_1'H_2$ i Størrelse og Retning, og Opgaven er dermed løst.

Paa lignende Maade som vi have fremstillet Arealændringer ved Fluxioner kan man fremstille uendelig smaa Volumenforandringer ved *Volumenfluxioner*, idet man da gaar ud fra et retvinklet Parallelepipedum, hvis Kanter man giver visse Længdefluxioner, og man fremstiller da Tilvæxten i Volumen ved et Parallelepipedum, hvis Grundflade er en af det givne Parallelepipedums Sideflader, og hvis Højde er en vis Fluxion.

59. En Kugle er given ved Centrum O og et Punkt A paa dens Overflade. Giver man nu Centrum Fluxionen OO_1, medens Punktet A faar Fluxionen AA_1, da faas en consecutiv Kugleflade med Centrum O' og gaaende gjennem A'.

Vi ville nu bestemme, hvilke Fluxioner man kan give et Punkt B paa den givne Kugleflade for at føre det over paa den consecutive. Man behøver da kun at udtrykke, at OB skal have samme Længdefluxion som OA. Da nu OO_1 er given, kjender man Projectionen af BB_1 paa OB, altsaa skal B_1 ligge i en ganske bestemt Plan vinkelret paa OB; denne Plan ville vi kalde *Kuglefladens Fluxionsplan* med Hensyn til B. Til ethvert Punkt paa Kuglefladen svarer da en saadan Fluxionsplan. Da Projectionen af O_1B_1 paa OB er lig OB plus den constante Længdefluxion, saa ser man, at O_1 har samme Afstand fra alle Fluxionsplanerne; altsaa:

Naar en foranderlig Kugle underkastes en saadan uendelig lille Forskydning, at Centrum O faar Fluxionen OO_1, da ville alle Fluxionsplanerne berøre en Kugle med Centrum i O_1.

Kjender man altsaa Fluxionerne for 4 Punkter paa Kuglen, altsaa ogsaa 4 Fluxionsplaner, da vil O_1 være Centrum for én

af de Kugler, der berøre disse. Vi skulle nu se, hvorledes man kan afgjøre, hvilket af de 8 Kuglecentrer man skal vælge.

De 4 Punkter paa Kuglen kaldes A, B, C og D, deres Tangentplaner henholdsvis α, β, γ og δ, medens de tilsvarende Fluxionsplaner ere α_1, β_1, γ_1 og δ_1. Afstandene fra A, B, C og D til deres resp. Fluxionsplaner betegnes med AA_1, BB_1, CC_1 og DD_1. Afsættes nu $OA_2 = AA_1$ paa OA, $OB_2 = BB_1$ paa OB o. s. v., da skulle Projectionerne O_A, O_B, O_C og O_D af O_1 paa henholdsvis OA, OB, OC og OD ligge saaledes, at Afstandene A_2O_A, B_2O_B, C_2O_C og D_2O_D ere lige store, ogsaa med Hensyn til Fortegn, idet de alle regnes positive fra O til det tilsvarende Punkt paa Kuglen.

Lægger man nu Planerne α_2, β_2, γ_2 og δ_2 vinkelrette paa henholdsvis OA, OB, OC og OD i Punkterne A_2, B_2, C_2 og D_2, da faas et Tetraeder med Hjørnespidserne A_3, B_3, C_3, D_3 (A_3 er Skæringspunktet mellem β_2, γ_2 og δ_2 o. s. v.). Nu har A_3O_1 lige store Projectioner paa Linierne OB, OC og OD og maa altsaa være parallel med Halveringsplanerne for Vinklerne BOC, COD og DOB. Halveringsplanen for $\angle$ BOC er imidlertid $\neq$ en af Halveringsplanerne for Rumvinklen $(\beta_2\gamma_2)$; paa denne Maade indsés det, at O_1 maa ligge i en Halveringsplan for hver af Rumvinklerne i Tetraedret $A_3B_3C_3D_3$. O_1 maa altsaa være Centrum for en Kugle, der berører Planerne α_2, β_2, γ_2 og δ_2. Da det nu tillige skal være Centrum for en Kugle, der berører Fluxionsplanerne α_1, β_1, γ_1 og δ_1, saa indser man, at O_1 enten ligger paa den Side af α_1, der angives ved Retningen AO, og analogt for β_1, γ_1 og δ_1, eller ogsaa ligger O_1 paa de til disse Retninger svarende modsatte Sider af Fluxionsplanerne. Man faar da følgende Regel: O_1 ligger i samme Forhold til Tetraedret $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$, som O til Tetraedret $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

60. Skæringen mellem 2 consecutive Kugler, den ene given ved Punkterne A, B, C og D, den anden fremstillet ved de til disse Punkter svarende Fluxionsplaner α_1, β_1 γ_1 og δ_1, kan bestemmes paa følgende Maade:

Idet man anvender Sætningen om, at Radicalplanerne for to og to af 3 Kugler gaa gjennem samme rette Linie (de 3 Kuglers Radicalaxe), tænke vi os lagt en Hjælpekugle gjennem A, B og C og med Centrum i Planen [ABC]. Man giver da A, B og C Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1, vinkelrette paa Planen [ABC], saaledes, at A_1, B_1 og C_1 falde i henholdsvis α_1, β_1 og γ_1. Derved blive A, B og C liggende paa Hjælpekuglen og føres samtidig over paa den ved de givne Fluxionsplaner fremstillede Kugle. Skæringslinien s mellem Planerne [ABC] og $[A_1B_1C_1]$ vil da være Radicalaxe for de 3 Kugler.

Nu kan man lægge en anden Hjælpekugle over CD som Diameter. Man giver da C og D Fluxionerne CC_2 og DD_2, der ere indbyrdes parallele og vinkelrette paa CD, medens C_2 og D_2 ligge i henholdsvis γ_1 og δ_1. CD og C_2D_2 skære hinanden i S, der vil ligge paa Radicalaxen for den nye Hjælpekugle og de 2 givne Kugler.

Planen gjennem s og S er da den søgte Skæringscurves Plan, og dermed er Opgaven løst.

Dersom de to consecutive Kugler ere givne, den ene ved Centrum O og et Punkt A, den anden ved Centrum O′ og et Punkt A′, fremstillede ved Fluxionerne OO_1 og AA_1, da kan man benytte følgende Fremgangsmaade:

Man vælger et nyt Punkt B paa den givne Kugle og finder den tilsvarende Fluxionsplan β_1; A's tilsvarende Fluxionsplan α_1 er bekjendt. Man giver nu A og B de parallele og paa AB vinkelrette Fluxioner AA_2 og BB_2 saaledes, at A_2 ligger i α_1, og B_2 i β_1. A_2B_2 skærer AB i S. Den søgte Skæringscirkels Plan gaar da gjennem S og vinkelret paa OO_1.

61. I 42 have vi bevist den Sætning, at naar en vilkaarlig given Curve underkastes en uendelig lille Forskydning i sin Plan saaledes, at alle dens Punkter faa uendelig smaa Forskydninger, da ville alle Fluxionspunkterne for et vilkaarligt Curvepunkt P ligge paa en ret Linie, Curvens Fluxionslinie med Hensyn til P, parallel med Curvens Tangent i P.

En ganske tilsvarende Sætning gjælder om Flader:

Naar en given Flade faar en uendelig lille Ændring saaledes, at alle dens Punkter forskydes et uendelig lille Stykke, da ville alle mulige Fluxionspunkter for et Punkt P paa Fladen ligge i en Plan, som vi ville kalde Fladens Fluxionsplan med Hensyn til P, og som er parallel med Fladens Tangentplan i P. Beviset faas simpelt hen ved at anvende den før nævnte Sætning paa alle de plane Curver paa Fladen, der gaa gjennem P.

Betragtes nu 2 Flader, og antage vi, at et Punkt af deres Skæringscurve er A, da vil A ved bestemte uendelig smaa Forskydninger af Fladerne faa sit Fluxionspunkt i begge Fladers Fluxionsplaner med Hensyn til A, altsaa paa disse Fluxionsplaners Skæringslinie, og dette er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at A føres over paa Skæringscurvens consecutive Stilling; altsaa ser man, at *naar en Rumcurve underkastes en uendelig lille Forskydning i Rummet, da vil ethvert af dens Punkter P have sit Fluxionspunkt paa en ret Linie parallel med Curvens Tangent i P. Denne rette Linie ville vi kalde Curvens Fluxionslinie med Hensyn til P.*

Har man nu 3 Flader, der skære hverandre i et Punkt P, da vil P ved uendelig smaa Forskydninger af Fladerne faa en Forskydning, der er bestemt ved, at P's Fluxionspunkt P_1 er Skæringspunktet mellem de givne Fladers Fluxionsplaner med Hensyn til P. Det simpleste Exempel herpaa er det, hvor de 3 Flader ere Planer, saa at man kjender hver Plans Centrallinie og Fluxionen for et Punkt i hver af Planerne.

Har man en Curve og en Flade, der skære hinanden i P, da kan P's Fluxionspunkt svarende til uendelig smaa Forskydninger af Curven og Fladen bestemmes som Skæringspunkt mellem Curvens Fluxionslinie og Fladens Fluxionsplan med Hensyn til P.

Naar en foranderlig Curve bevæger sig frem i Rummet paa en bestemt Maade, beskriver den en Flade. Betragtes Curven i en vilkaarlig Stilling, da vil ved Overgang til den consecutive Stilling et Punkt P paa Curven svare til en bestemt

Fluxionslinie p. Planen gjennem P og p vil da være Tangentplan til den beskrevne Flade i P; denne Plan indeholder jo nemlig Forbindelseslinierne mellem P og uendelig mange consecutive Punkter paa Fladen.

Den ovenstaaende Udvikling gjælder kun for saadanne Punkter P paa den betragtede Flade (Curve), at en uendelig lille Forskydning af P ogsaa medfører en uendelig lille Forskydning af den tilsvarende Tangentplan (Tangent).

62. En Cirkel er bestemt ved 3 Punkter A, B og C. Giver man A, B og C Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1, faas en consecutiv Cirkel. Vi ville bestemme Fluxionspunktet O_1 for den givne Cirkels Centrum O. Længdefluxionerne for OA, OB og OC ere lige store, og det samme vil være Tilfældet, naar man giver A, B, C og O saadanne Fluxioner AA_2, BB_2, CC_2 og OO_2, som faas ved at projicere AA_1, BB_1, CC_1 og OO_1 paa Planen [ABC]. Da nu AA_2, BB_2 og CC_2 ere bekjendte, kan man finde OO_2 (11). O_1 bestemmes derefter som Skæringspunkt mellem Planen [ABC]'s Normal i O_2 og den samme Plans Fluxionsplan med Hensyn til O. Projectionerne af alle Cirklens Fluxionslinier paa Planen [ABC] ville berøre en og samme Cirkel med Centrum i O_2.

63. En ret Linie AB og et Punkt C ere givne; de 3 Punkter A, B og C faa Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1. Vi ville lægge en Plan gjennem C' vinkelret paa $A'B'$. Denne Plan α' bliver consecutiv til Planen α gjennem C vinkelret paa AB. Vi erstatte AA_1, BB_1 og CC_1 med 3 nye Fluxioner AA_2 og BB_2, vinkelrette paa AB, samt CC_2, vinkelret paa α, idet A_1A_2 og B_1B_2 ere parallele med AB, medens $C_1C_2 \neq \alpha$. Lægges nu gjennem C_2 en Plan vinkelret paa A_2B_2, da vil denne Plan skære α i dennes Centrallinie (for Overgangen til α'). Beviset faas ved at afbilde hele Rumfiguren retvinklet paa en Plan $\neq$ AB og $A'B'$.

AB faar derved Billedet A^pB^p, og A_2 og B_2 afbildes i A_2^p og B_2^p, saa at disse Punkter ere Fluxionspunkter for hen-

holdsvis A^p og B^p. Planen α afbildes som en Linie a, medens C og C_2 afbildes i C^p og C^p_2, saaledes at $C^pC^p_2$ er fri Fluxion for a (vinkelret for denne). Centralpunktet for a faas nu i Følge 6 ved fra C^p_2 at fælde en vinkelret paa $A^p_2B^p_2$ og søge dennes Skæringspunkt med a. Men dette Centralpunkt vil netop være Billede af Centrallinien for α, hvorved altsaa den angivne Construction er bevist.

Kjender man en Rumcurve saaledes, at et Punkts og dets Tangents sammenhørende infinitesimale Forskydninger ere bekjendte, da kan man finde Rumcurvens Krumningsaxe; denne vil nemlig være Centrallinie for Normalplanen og kan findes paa følgende Maade:

Det betragtede Curvepunkt er A, dettes Tangent a, og et vilkaarligt Punkt paa denne P; giver man nu A Fluxionen AA_1 (paa a), da vil P faa en tilsvarende Fluxion PP_1, der antages at være $\perp$ a (idet det tilsvarende P′ ligger paa den consecutive Tangent a′). I Følge det foregaaende drages nu Linien AP_1, og en Plan gjennem A_1 vinkelret paa denne vil skære Curvens Normalplan i A i den søgte Krumningsaxe. Man faar altsaa i den osculerende Plan ganske den samme Construction af en Rumcurves Krumningscentrum som den, vi have udledet for plane Curver (6).

64. Ved Hjælp af den i 63 angivne Construction faas strax en Løsning af Opgaven: Fra et ved en Fluxion fremstillet Punkt at fælde en vinkelret paa en ved Fluxioner given Plan. Vi antage Punktet givet ved Fluxionen MM_1; Planen er bestemt ved 3 Punkter, fremstillede ved Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1. Man fælder først fra M den vinkelrette a paa Planen [ABC]; den søgte Linie er da consecutiv til a. Derpaa erstattes AA_1, BB_1 og CC_1 med Fluxionerne AA_2, BB_2 og CC_2 vinkelrette paa [ABC], idet da som sædvanlig A_1A_2, B_1B_2 og C_1C_2 ere parallele med Planen. Ligesaa erstattes MM_1 med MM_2 $\perp$ a saaledes, at $M_1M_2 \neq$ a. Fra M_2 fældes nu en vinkelret paa Planen $[A_2B_2C_2]$, og denne vinkelrette vil da indeholde alle

Fluxionspunkter for a's Punkter, idet de valgte frie Fluxioner ere vinkelrette paa a.

65. Gjennem et Punkt A′ ville vi drage en Linie $\neq$ B′C′, idet A′, B′ og C′ ere givne ved Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1. Den søgte Linie er consecutiv til Linien a gjennem A og $\neq$ BC. Man ombytter AA_1 med $AA_2 \perp$ a, idet $A_1A_2 \neq$ a; BB_1 og CC_1 erstattes med BB_2 og CC_2, vinkelrette paa BC paa sædvanlig Maade. Gjennem A_2 drages nu en Linie $\neq$ B_2C_2, og denne Linie er da geometrisk Sted for Fluxionspunkterne til a's Punkter, idet alle Fluxionerne vælges vinkelrette paa a.

Beviset for Constructionens Rigtighed faar man ved at afbilde de givne Linier paa en Plan $\neq$ BC og B′C′ (retvinklet Afbildning). Derved indsés, at Billedet af den Linie a_2, der indeholder Fluxionspunkterne svarende til de paa a vinkelrette Fluxioner, maa være $\neq$ Billedet af B_2C_2.

Afbildes nu paa en ny Plan $\perp$ a, da vil i denne Afbildning B′C′ og B_2C_2 faa parallele Billeder, og det tilsvarende gjælder for Linien a.

Da altsaa a_2 og B_2C_2 have deres Billeder parallele i begge Afbildninger, maa de i Virkeligheden selv være parallele.

66. Naar 2 Planer ere parallele og forskydes saaledes, at de beholde denne Egenskab, da maa de have congruente Fluxionssystemer. Vil man altsaa gjennem Punktet P′, fremstillet ved Fluxionen PP_1, lægge en Plan $\neq$ Planen [A′B′C′], hvor A′, B′ og C′ ere givne ved Fluxionerne AA_1, BB_1 og CC_1, da kan dette udføres ved gjennem P at lægge en Plan α $\neq$ [ABC] og undersøge, hvilken Forskydning den skal underkastes for at komme i den søgte Stilling. Man ombytter AA_1, BB_1 og CC_1 med Fluxionerne AA_2, BB_2 og CC_2, vinkelrette paa [ABC], og PP_1 erstattes med $PP_2 \perp \alpha$, saa at $P_1P_2 \neq \alpha$. Lægger man nu gjennem P_2 en Plan $\neq$ $[A_2B_2C_2]$, da skærer denne α i Centrallinien for α, hvis Forskydning altsaa nu er bekjendt.

VI.

Anvendelser af de geometriske Fluxioner paa Problemer i Rummet.

---

67. *Meusnier's Theorem.* Paa en Flade er givet et Punkt A med Tangentplanen α; giver man A Fluxionen AA_1, da kommer man til det consecutive Punkt A', hvis Tangentplan α' i Almindelighed ligger uendelig nær ved α. Hvilken Fluxion man skal give et vilkaarligt Punkt i α for at komme til α', og hvilken Centrallinie α faar, afhænger af Fladens specielle Natur. Vi ville antage, at α faar den frie Fluxion $XX_1 \perp \alpha$ i et vilkaarligt Punkt X paa Linien AA_1. Denne Linie kaldes m.

Naar α flyttes til α', da kan m komme over i en Stilling m', om hvilken intet andet er bestemt end, at den skal ligge i α'; vi betragte kun saadanne Forskydninger, at m og m' ligge i samme Plan, saa at A er Centralpunkt for m. Planen [mm'] kan vælges vilkaarlig. Fluxionen AA_1 og Forskydningen af m til m' ville i ethvert Tilfælde bestemme Krumningen af Fladens Skæringscurve med [mm'] i Punktet A. Ved at betragte alle mulige Forskydninger af m (med Centralpunkt A) faas altsaa alle Krumningerne for Skæringscurver mellem Fladen og Planer gjennem m. De forskjellige frie Fluxioner for m (vinkelrette paa denne) med Hensyn til Punktet X faa deres Endepunkter paa en ret Linie $x_1 \neq \alpha$ og $\perp$ m. Forbindes nu et af disse Fluxionspunkter X_1 med A, og fældes fra A_1

en vinkelret paa X_1A, da vil denne vinkelrette, som antages at skære X_1A i Y, skære Planen π gjennem A og vinkelret paa AA_1 i et af de søgte Krumningscentrer O.

Lader man X_1 gjennemløbe x_1, vil Y beskrive en Cirkel, som ligger paa en Kugle over AA_1 som Diameter. Denne Cirkel vil fra A_1 afbildes paa π som en Cirkel (Stereographisk Afbildning). Da nu hele den betragtede Figur deles symmetrisk af Fladens Normalplan gjennem AA_1, saa vil den fundne Cirkel, det geometriske Sted for O, ogsaa deles symmetrisk af denne Plan. Vi have da bevist det bekjendte Meusnier's Theorem.

68. *En ret Linie l drejer sig om et fast Punkt O saaledes, at den skærer en given Rumcurve (A) i det bevægelige Punkt A samt en given Flade [B] i Punktet B. Tangenten a til Rumcurven i A og Tangentplanen β til Fladen i B skære hinanden i et Punkt M. Naar l bevæger sig, beskriver M en Curve; bestem dennes Tangent.*

Punktet B gjennemløber paa Fladen [B] en Curve, hvis Tangent b faas som Skæringslinie mellem Planerne [Oa] og β; giver man nu A en vis Fluxion AA_1 (paa a), faar B en derved bestemt Fluxion BB_1 (paa b). Ved Hjælp af Krumningscentret for Curven (A) i A kan man bestemme Fluxionslinien for a med Hensyn til M, og Krumningscentret for Normalsnittet gjennem BB_1 til Fladen [B] bestemmer Fluxionsplanen for β med Hensyn til M (67). Skæringspunktet mellem den fundne Fluxionslinie og den fundne Fluxionsplan bliver M's Fluxionspunkt M_1, og MM_1 er den søgte Tangent.

69. *En ret Linie l drejer sig om et fast Punkt O og skærer 3 faste Flader i de bevægelige Punkter A, B og C. Fladernes Tangentplaner α, β og γ i disse Punkter skære hverandre i et Punkt M, der beskriver en Flade, naar l drejer sig om O. Man skal bestemme denne Flades Tangentplan i Punktet M.*

Opgaven løses ved, at man bestemmer 2 Tangenter til den frembragte Flade i M. Man vælger Fluxionen AA_1 (i α)

for A og bestemmer de tilsvarende Fluxioner for B og C. De tilsvarende Forskydninger af α, β og γ kunne nu bestemmes (67), idet vi antage de givne Fladers Krumningsforhold bekjendte i A, B og C. Man faar da M's Fluxionspunkt M_1 som Skæringspunkt mellem Fluxionsplanerne for α, β og γ med Hensyn til M. Derved faar man én Tangent MM_1 til Fladen [M]; en anden Tangent bestemmes nu paa lignende Maade, og de to fundne Tangenters Plan er den søgte Tangentplan.

70. *En Flade frembringes af en foranderlig Cirkel, der stadig skærer 3 givne rette Linier a, b og c, og hvis Plan gaar gjennem en fast Linie d. Bestem Tangentplanen i et vilkaarligt Punkt af Fladen.*

Man lægger Cirklen i en vilkaarlig Stilling, saa at den skærer a, b og c i henholdsvis A, B og C. Vi ville bestemme Fladens Tangentplan i et Punkt X af denne Cirkel. Planen [ABC] vil ved en uendelig lille Forskydning have Centrallinien d. Giver man A Fluxionen AA_1 (paa a), faa B og C Fluxionerne BB_1 og CC_1, som bestemmes ved 55. I Følge 62 kan man nu finde Fluxionslinien x_1 for Cirklen med Hensyn til X, og Planen $[Xx_1]$ er den søgte Tangentplan.

71. *Vi antage 5 rette Linier a, b, c, d og e givne paa vilkaarlig Maade i Rummet; en Plan drejer sig omkring en given Linie l. Dens bevægelige Skæringspunkter med de 5 givne Linier bestemme et Keglesnit k. Bestem Tangentplanen i et vilkaarligt Punkt af den Flade, som frembringes af k, naar Planen drejer sig om l.*

Vi betragte Keglesnittet k i en bestemt Stilling, skærende a, b, c, d og e i henholdsvis A, B, C, D og E. Skal man nu bestemme den frembragte Flades Tangentplan i et Punkt X af dette Keglesnit, giver man A Fluxionen AA_1; B, C, D og E faa derved Fluxionerne BB_1, CC_1, DD_1 og EE_1, der kunne construeres i Følge 55. Derved kommer man til det consecutive Keglesnit k'. Projiceres k' paa Planen [ABCDE], faas et Keglesnit k'', der ogsaa fremkommer ved at give k en saadan

uendelig lille Forskydning, at A, B, C, D og E faa Fluxioner AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 og EE_2, der faas ved at projicere AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 og EE_1 ned paa Planen [ABCDE]. Man ved nemlig (54), at et Punkts Fluxion afbildes (ved Parallelafbildning) som Fluxion for Punktets Billede.

Man kan nu, idet vi betragte den sidst omtalte Forskydning af k, finde Fluxionslinien x_2 for k med Hensyn til X i Følge 42. Da man nu kjender Fluxionsplanen for [ABC] med Hensyn til X, behøver man blot i denne Plan at opsøge en Linie x_1, hvis Projection paa [ABC] er x_2. x_1 vil da være Fluxionslinie for k med Hensyn til X (for den oprindelige Forskydning fra k til k′). Den søgte Tangentplan er da Planen [Xx_1].

72. *En Plan drejer sig om en fast Linie og skærer Rumcurverne (A), (B), (C) og (D) i 4 bevægelige Punkter A, B, C og D. Rumcurvernes Tangenter i disse Punkter ere henholdsvis a, b, c og d; disse skæres i Almindelighed af 2 rette Linier l og m, som, naar Planen bevæger sig, beskrive en Flade; til denne skal man bestemme Tangentplanen i et vilkaarligt Punkt.*

Gjennem a, b og c lægge vi en Flade φ af 2. Orden, hvis Skæringspunkter X og Y med d kunne bestemmes ved at skære Fladen med (D)'s osculerende Plan δ i D. Vi vælge da to vilkaarlige Frembringere q og r paa φ og antage, at δ skærer a, b, c, q og r i Punkterne henholdsvis M, N, P, Q og R. X og Y ere Skæringspunkter mellem det ved disse 5 Punkter bestemte Keglesnit k og Linien d. l og m gaa gjennem henholdsvis X og Y. Vi antage, at l skærer a, b og c i Punkterne henholdsvis U, V og Z. Giver man nu A Fluxionen AA_1, faa B, C og D derved bestemte Fluxioner BB_1, CC_1 og DD_1; Rumcurvernes Krumninger bestemme derefter de tilsvarende Forskydninger af a, b, c og d. Hyperboloiden φ kommer derved i en consecutiv Stilling φ', og for at finde dens Skæringspunkter X′ og Y′ med d′ overskærer man den med δ. Fluxionerne for M, N, P, Q og R skulle nu bestemmes; de komme alle i δ. q antages at skære a, b og c i Punkterne henholdsvis

A_q, B_q og C_q; A_q faar da en Fluxion, om hvilken vi ikke vide andet end, at dens Endepunkt skal ligge paa a's Fluxionslinie med Hensyn til A_q; vi vælge den da forøvrigt vilkaarlig og skulle nu gjennem det saaledes bestemte A_q' lægge Linien q' skærende b' og c'. Man lægger da en Plan gjennem A_q' og b' og søger dens Skæring med c'. Dette kan udføres paa følgende Maade:

Planen $[A_q b]$ har en bekjendt Fluxionsplan β_1 med Hensyn til B_q; man multiplicerer β_1 med $A_qC_q : A_qB_q$ med Hensyn til A_{q1} (det bekjendte Fluxionspunkt for A_q).

Derved kommer man til en ny Plan γ_1, som er Fluxionsplan for $[A_q b]$ med Hensyn til C_q, og γ_1 vil derfor skære c's Fluxionslinie med Hensyn til C_q i dette Punkts Fluxionspunkt C_{q1}. Da man nu kjender Fluxionerne for 2 af Punkterne paa q, kan man finde Q's Fluxion, og paa lignende Maade bestemme R's Fluxion. Den infinitesimale Forskydning af Keglesnittet k er da bestemt ved Fluxionerne for de 5 Punkter M, N, P, Q og R, og Fluxionspunktet X_1 for X findes som Skæringspunkt mellem Fluxionslinierne for k og d med Hensyn til X.

Vi ombytte nu XX_1 med $XX_2 \perp l$ saaledes, at $X_1X_2 \neq l$, og søge Skæringslinierne u_1 og v_1 mellem l's Normalplaner i U og V og 2 Planer parallele med l gjennem Fluxionslinierne for henholdsvis a og b med Hensyn til U og V. Linien gjennem X_2 og skærende u_1 og v_1 indeholder alle Fluxionspunkterne for l's Punkter, idet Fluxionerne ere vinkelrette paa l. Et vilkaarligt Punkt paa l har altsaa en bekjendt Fluxionslinie, og den af l beskrevne Flades Tangentplan i Punktet findes da ved 61.

73. *En Trekant ABC bevæger sig med constant Areal saaledes, at dens Vinkelspidser beskrive givne Curver (A), (B) og (C). Bestem et Punkt af Indhyllingsfladen for Trekantens Plan.*

Giver man A og B Fluxionerne AA_1 og BB_1 paa Tangenterne til Curverne henholdsvis (A) og (B), kan man bestemme Fluxionen CC_1 for C, idet man véd, at den skal falde paa Tangenten c til Curven (C) i C. Man véd tillige, at Tre-

kantens Arealfluxon skal være Nul, og i Følge 55 bliver dette da ogsaa Tilfældet, naar man forskyder Trekanten i dens Plan saaledes, at A og B faa Fluxionerne AA_2 og BB_2, der ere Projectioner af henholdsvis AA_1 og BB_1 paa Planen [ABC]. C's Fluxion bestemmes paa lignende Maade, og da man véd, at CC_2 skal falde paa c's Projection paa Planen [ABC], saa kan man i Følge 58 finde CC_2, da AA_2 og BB_2 ere bekjendte. CC_1 kan derefter bestemmes, og Planen [ABC] har da en bekjendt Centrallinie m. Vælge vi nu 2 andre Fluxioner for A og B, faas paa lignende Maade en ny Centrallinie n for [ABC]; m og n skære hinanden i det søgte Punkt af Indhyllingsfladen.

74. *Et Tetraeder ABCD bevæger sig med constant Volumen saaledes, at Hjørnespidserne beskrive givne Rumcurver, medens den ene Sideflade [ABC] gaar gjennem en fast Linie. Bestem Indhyllingsfladen for Tetraedrets omskrevne Kugle.*

Vælger man en vis Fluxion AA_1 for A, faa B og C i Følge 55 bestemte Fluxioner BB_1 og CC_1; for D kjender man foreløbig kun Fluxionens Retning, idet DD_1 skal falde paa Tangenten d til den af D beskrevne Curve. Da Forskydningen af $\triangle$ ABC er fuldstændig bestemt, kan man finde Længdefluxionerne f_1 og f_2 for henholdsvis AB og Højden paa denne CH. Vi skulle nu bestemme Længdefluxionen f_3 for Tetraedrets Højde DE saaledes, at det retvinklede Parallelepipedum, hvis Kanter ere AB, CH og DE faar Volumenfluxionen Nul, naar Kanterne faa Fluxionerne f_1, f_2 og f_3.

Rectanglet med Siderne AB og CH faar en bestemt Arealfluxion (57). Man bestemmer nu først en saadan Længdefluxion f_1' for AB, at, idet CH er uforandret, det betragtede Rectangel faar samme Arealfluxion, som det faar, naar man giver Siderne AB og CH Fluxionerne f_1 og f_2. Dette kan udføres i Følge 57. Man finder derpaa Længdefluxionen f_3 for DE derved, at et Rectangel med Siderne AB og DE faar Arealfluxionen Nul, naar disse faa Længdefluxionerne henholdsvis f_1' og f_3. Dette udføres ved 58.

Man erstatter nu AA_1, BB_1 og CC_1 med Fluxionerne AA_2, BB_2 og CC_2 vinkelrette paa Planen [ABC] saaledes, at A_1A_2, B_1B_2 og C_1C_2 ere parallele med denne Plan. Planen $[A_2B_2C_2]$ skærer DE i E_2 saaledes, at EE_2 er Projectionen af E's Fluxion paa DE. Man drager derpaa gjennem E_2 en Linie $d' \neq d$ og søger dens Skæringspunkt D_1' med en Plan $\neq$ [ABC] i Afstanden f_3 fra denne (hvis f_3 er en positiv Længdefluxion, da skal denne Hjælpeplan ligge paa den Side af [ABC], der er bestemt ved Retningen DE, ellers omvendt). DD_1 er da lig og modsat rettet E_2D_1' og er altsaa nu bestemt.

Da A, B, C og D nu have bekjendte Fluxioner AA_1, BB_1, CC_1 og DD_1, kan man i Følge 60 finde Skæringscurven mellem de to consecutive Kugler, hvoraf den ene gaar gjennem Punkterne A, B, C og D, og den anden gjennem A′, B′, C′ og D′; men denne Skæringscurve vil være Charakteristiklinien for den søgte Indhyllingsflade.

75. *Bestemmelse af Krumningen i et Punkt af Indhyllingsfladen for en foranderlig Kugle, der af 3 givne Kugler* α, β *og* γ *afskære constante Arealer.*

Vi antage den foranderlige Kugle φ given i en vilkaarlig Stilling med Centrum O. Kuglerne α, β og γ have Centrum i henholdsvis A, B og C og skære φ i Cirkler, hvis Centrer ere M, N og P. Planen [MNP] vil da skære φ i en Cirkel c, der er Charakteristiklinie for den søgte Indhyllingsflade. Vi ville nu bestemme denne Flades Krumningsforhold i et vilkaarligt Punkt X paa c.

Kuglen φ flyttes over i en consecutiv Stilling ved at give O en vilkaarlig Fluxion vinkelret paa Planen [MNP]. Linierne AMO, BNO og CPO faa nu dertil svarende infinitesimale Forskydninger. Man kan da finde Fluxionerne MM_1, NN_1 og PP_1 for M, N og P. Fluxionsplanen for [MNP] med Hensyn til X construeres, og dens Skæringslinie med Tangentplanen til φ i X bliver Fluxionslinie for c med Hensyn til X. Denne Fluxionslinie ville vi kalde x_1. En af de mulige Fluxioner for X be-

stemmes ved at søge Skæringspunktet X_1 mellem x_1 og Planen $[OO_1X]$. Giver man da X Fluxionen XX_1, saa vil OX skære sin consecutive Stilling, og Centralpunktet for OX bliver det ene Hovedkrumningscentrum for Indhyllingsfladen i X. Det andet Hovedkrumningscentrum falder i O, og Krumningsforholdene i X ere da fuldstændig bestemte.

76. *Bestemmelse af den osculerende Plan til en Rumcurve, naar Curvens lodrette og vandrette Billede have bekjendt Krumning.*

Et Punkt A af Rumcurven har Billederne A_L og A_V; medens den tilsvarende Tangent a er fremstillet ved a_L og a_V.
Fig. 8. Krumningscentrerne for Curvens lodrette og vandrette Billede i henholdsvis A_L og A_V ere O_1 og O_2.

Vi give da A Fluxionen AA_1, der afbildes som A_LA_{L1} og A_VA_{V1}. a_L skærer Grundlinien i U, og det vandrette Spor for a er V saaledes, at UV er vinkelret paa Grundlinien. Man søger nu Skæringspunktet M mellem den vinkelrette paa a_L i U og en Linie gjennem A_L vinkelret paa O_1A_{L1}. En Linie gjennem M parallel med a_L træffer Grundlinien i U_1, som da er Fluxionspunkt for U. I vandret Billede søger man nu paa lignende Maade Skæringspunktet N mellem den vinkelrette paa a_V i V og en Linie gjennem A_V vinkelret paa O_2A_{V1}.

En Linie gjennem N parallel med a_V vil være dennes Fluxionslinie med Hensyn til V, og V's Fluxionspunkt V_1 faas som Skæringspunkt mellem den sidst fundne Linie og den vinkelrette paa Grundlinien i U_1. VV_1 er da det vandrette Spor for den søgte osculerende Plan.

For at bestemme Rumcurvens Krumningscentrum kan man nedlægge den osculerende Plan i den vandrette Billedplan ved Drejning om VV_1. A kommer da i Punktet A^n, og A_1 i $A_1{}^n$. Nedlægningen af a kalde vi a^n. Man bestemmer nu et Punkt V_2 saaledes, at VV_2 er vinkelret paa a^n, medens $V_1V_2 \neq a^n$.

Gjennem $A_1{}^n$ drages en vinkelret paa A^nV_2 til Skæring med Normalen til a^n i A^n.

Det fundne Skæringspunkt er da det nedlagte Krumningscentrum.

77. *Bestemmelse af Tangenten til Røringscurven mellem en* Fig. 9.
Omdrejningsflade og en om denne omskreven Kegleflade.

Omdrejningsfladen er given ved lodret Axe a og Hovedmeridian H; den omskrevne Kegleflade har Toppunkt T. Gjennem et Punkt A af Hovedmeridianen gaar Parallelcirklen c. Man finder nu paa sædvanlig Maade et Punkt M paa c af Keglefladens Røringscurve med Omdrejningsfladen: Man lægger gjennem T en vandret Plan, der skærer den Kegleflade, der rører Omdrejningsfladen langs med c, i en Cirkel u. Over $T_v a_v$ som Diameter tegnes en Cirkel, der skærer u_v i U. Linien Ua_v skærer da c_v i det søgte Punkt M's vandrette Billede M_v.

Man anvender nu den samme Construction paa det consecutive Punkt til A bestemt ved Fluxionen AA_1. Drages Linien OA_1 (O er Krumningscentrum for H i A), og fældes fra A en vinkelret paa denne til Skæring i P med den vinkelrette paa AA_1 i A_1, da vil Linien PQ parallel med AA_1 afskære Stykket A_1Q paa u_L saaledes, at A_1Q er Længdefluxion for Radius i u. Afsættes i vandret Billede UU_2 (paa a_vU) $= A_1Q$, da vil $U_2U_1 \perp UU_2$ være Fluxionslinie for u_v med Hensyn til U. Tangenten i U til Cirklen over a_vT_v som Diameter skærer denne Fluxionslinie i U_1 saaledes, at UU_1 er den virkelige Fluxion for det construerede Punkt U. Da a_v ligger fast, kan man nu bestemme Fluxionen for Ua_v med Hensyn til M_v. Man finder da et Punkt Z saaledes, at $U_1Z \neq U_2U$, og $UZ \perp UU_2$; dernæst drages Za_v, og dennes Skæringspunkt V med den vinkelrette paa Ua_v i M_v bestemmer den omtalte Fluxionslinie VN. Denne skærer UZ, der er Fluxionslinie for c_v med Hensyn til M_v i Punktet N. Dette maa være Fluxionspunkt for M_v, saa at M_vN bliver vandret Billede af den søgte Tangent. Da man nu let construerer vandret Spor for Omdrejningsfladens Tangentplan i M, kan man ogsaa finde Tangentens vandrette Spor og dermed dens lodrette Billede.

78. ***Sammenhængen mellem et Punkts Fluxion og Fluxionen for Punktets perspectiviske Billede.***

Det betragtede Punkt og dets Fluxionspunkt ere henholdsvis A og A_1. Billederne af disse Punkter ere A_p og A_{1P}, medens Linien AA_1 har Spor P og Retningspunkt U. Vi ville nu bestemme Fluxionspunktet A_{P1} for A_p. Dette udføres, idet Øjepunktet for Afbildningen er Ø, ved at finde et Punkt M saaledes, at $A_pM \neq AA_1$, og $ØA_1$ gaar gjennem M. Dernæst drages en Linie gjennem M $\neq$ ØA, og denne Linies Spor er det søgte Punkt A_{P1}. Man faar da følgende Construction: En vilkaarlig Linie gjennem A_{1P} skæres af 2 Paralleler gjennem U og A_p i henholdsvis U′ og P′. M afbildes i A_{1P} og ligger paa den rette Linie, hvis Spor er P′, og hvis Retningspunkt er U′. Gjennem M skal nu lægges en Linie med Retningspunkt i A_p; denne Linies Spor A_{P1} faas da som Skæringspunkt mellem PU og en Linie gjennem P′ $\neq$ A_pU'.

Af Figuren ses det, at $\overline{A_pA_{1P}}$ er Mellemproportional mellem $\overline{A_{1P}U}$ og $\overline{A_{1P}A_{P1}}$. Dette giver en anden Construction af det søgte Punkt.

VII.

Bevægelse i Rummet af Figurer med constant Projectivitetssammenhæng.

---

79. En ret Linie antages at bevæge sig saaledes, at dens Punktrække er projectiv-uforanderlig. Det er da bekjendt, at naar 3 af dens Punkter beskrive rette Linier, da vil dette være Tilfældet med alle Punkter paa Linien; alle Banerne ville være Frembringere paa en vindskæv Flade af 2. Orden. Naar 3 af Liniens Punkter A, B og C beskrive givne Rumcurver (A), (B) og (C), vil et vilkaarligt Punkt X paa Linien beskrive en ganske bestemt Rumcurve (X). Linien selv vil beskrive en vindskæv Flade. Tangenten til (X) i X bestemmes ved at erstatte (A), (B) og (C) med deres Tangenter. Giver man nu A Fluxionen AA_1, idet vi betragte en uendelig lille Forskydning af Linien, kunne Fluxionerne BB_1, CC_1 og XX_1 bestemmes. C′ skal nemlig ligge i Planen ($A'BB_1$), der faas ved at underkaste (ABB_1) en saadan uendelig lille Forskydning, at BB_1 er Centrallinie, og AA_1 fri Fluxion i Punktet A. CC_1 findes da i Følge 55, og de andre Fluxioner bestemmes derefter ved 54.

Dersom Krumningerne for (A), (B) og (C) ere givne, kan man paa følgende Maade finde Krumningscentret for (X). Idet de sammenhørende Fluxioner AA_1, BB_1, CC_1 og XX_1 antages bestemte, og Tangenterne til (A), (B), (C) og (X) i de betragtede Punkter af den bevægelige Linie ere henholdsvis a, b, c og x, da kan man ved Hjælp af 6 bestemme Forskyd-

ningerne af a, b og c til disses consecutive Stillinger a′, b′ og c′. For nu at finde den infinitesimale Forskydning af x lægger man en ret Linie m, der skærer a, b, c og x i Punkterne henholdsvis P, Q, R og S, og flytter m saaledes, at Fluxionspunkterne for P, Q og R falde paa de til disse Punkter svarende Fluxionslinier for a, b og c. Denne Forskydning af m bestemmes som tidligere angivet (72). Ved Hjælp af de derved fundne Fluxioner PP_1, QQ_1 og RR_1 opsøges derpaa Fluxionen SS_1 for S. SS_1 er da fri Fluxion for x, og Krumningscentret for (X) i X bestemmes ved 6.

80. Det er bekjendt, at naar 2 Punkter A og B af en ret Linie, hvis Punktrække har constant Projectivitetssammenhæng, beskrive rette Linier, medens et tredje Punkt C paa Linien gjennemløber en Plan, da vil ethvert af Liniens Punkter være bundet til en bestemt Plan. Ved Hjælp heraf indser man: Naar en ret Linie bevæger sig saaledes, at 2 af dens Punkter beskrive rette Linier, og 2 andre bevæge sig i givne Planer, da ville alle Punkter paa Linien beskrive rette Linier ɔ: Bevægelsen bliver den i Begyndelsen af 79 omtalte.

Naar ét af Liniens Punkter beskriver en ret Linie, og 3 andre bevæge sig i givne Planer, da ville alle andre Punkter paa Linien gjennemløbe hvert sin bestemte Plan. De 4 Punkter kunne være A, B, C og D, et vilkaarligt Punkt X; A beskriver Linien a, og B, C og D skulle ligge i Planerne henholdsvis β, γ og δ. Projectivitetssammenhængen (ABCDX) antages lagt i 2 af de mulige Stillinger, $(A_1B_1C_1D_1X_1)$ og $(A_2B_2C_2D_2X_2)$. Man ser da, at X vil kunne ligge overalt paa Linien X_1X_2 hvilket viser, at det geometriske Sted for X er en Plan.

Paa ganske den samme Maade beviser man Sætningen:

Naar 5 af Liniens Punkter gjennemløbe givne Planer, da ville alle Punkter paa Linien beskrive hvert sin Plan. De beskrevne plane Figurer ere collineære, og Baneplanerne indhylle en udfoldelig Flade af 3. Klasse.

Heraf følger atter:

Naar 6 Punkter skulle bevæge sig i givne Planer, da ville alle Liniens Punkter beskrive bestemte rette Linier.

Naar man har givet 7 Planer, og man skal finde en ret Linie, der skærer dem i en Punktgruppe med given Projectivitetssammenhæng, da har Opgaven i Almindelighed kun én Løsning. Den søgte Linie findes ved successiv Anvendelse af de foregaaende Sætninger.

81. Angaaende den almindelige Bevægelse af en projectivuforanderlig ret Linie kan man nu indse, at naar 5 Punkter ere bundne til bestemte Flader, vil ethvert Punkt i Almindelighed beskrive en bestemt Flade, og dersom 6 Punkter stadig skulle ligge paa givne Flader, gjennemløber ethvert af Liniens Punkter en bestemt Rumcurve.

Vi antage, at de 5 Punkter A, B, C, D og E paa Linien l skulle bevæge sig paa Fladerne [A], [B], [C], [D] og [E], hvis Krumningsforhold i de betragtede Punkter af l ere bekjendte. Et Punkt X paa l vil da beskrive en Flade [X], hvis Krumning vi ville bestemme.

Tangentplanerne til Fladerne kaldes α, β, γ, δ, ε og ξ, svarende til henholdsvis A, B, C, D, E og X som Røringspunkter. Man lægger en ret Linie m, der skærer α, β, γ, δ og ε i Punkterne henholdsvis M, N, P, Q og R og bestemmer et Punkt S saaledes, at

$$(MNPQRS) \,\overline{\wedge}\, (ABCDEX)$$

S skal ligge i ξ, og man kan da, efter at have bestemt endnu et Punkt af denne Plan paa samme Maade, betragte ξ som bekjendt. Nu forskydes l til den consecutive Stilling l′, idet Fluxionen AA_1 for A vælges vilkaarlig i Planen α og paa Linien AM. De tilsvarende Fluxioner BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 og XX_1 kunne bestemmes i Følge det foregaaende, da de skulle ligge paa de bekjendte Linier henholdsvis BN, CP, DQ, ER og XS. Tangentplanerne α, β, γ, δ og ε faa samtidig infinitesimale Forskydninger, der kunne bestemmes i Følge 67.

Man giver nu m en saadan Forskydning, at Fluxionspunk-

terne M_1, N_1, P_1, Q_1 og R_1 for M, N, P, Q og R falde i de til disse Punkter svarende Fluxionsplaner for α, β, γ, δ og ε. Dette kan udføres paa uendelig mange Maader, saa at vi kunne vælge M_1 vilkaarlig (i den til M svarende Fluxionsplan for α). De bekjendte Fluxionsplaner, hvori N_1, P_1, Q_1 og R_1 skulle ligge, antages at være ν, π, $\varkappa$ og ρ. Naar man nu foreløbig ikke kræver andre Betingelser opfyldte end, at M faar Fluxionen MM_1, og at N_1 og P_1 falde i henholdsvis ν og π, da vil det geometriske Sted for Q_1 være en Plan*). For at finde denne Plan $\varkappa_1$, giver man (MNPQ) en saadan Forskydning, at M faar Fluxionen MM_1, og N faar en saadan Fluxion NN_2, at N_2 ligger i ν's Skæringslinie med Planen $[MM_1N]$. Gjennem det ved denne Forskydning bestemte Fluxionspunkt for Q lægges nu $\varkappa_1 \neq \delta$.

Skæringslinien mellem $\varkappa_1$ og $\varkappa$ er geometrisk Sted for Q_1. Paa lignende Maade faas en ret Linie som geometrisk Sted for R_1, og denne Linies Skæringspunkt med ρ er da det søgte Fluxionspunkt R_1 for R.

Den omtalte infinitesimale Forskydning af m er nu bestemt saaledes, at man kan finde m's Fluxionslinie med Hensyn til S, og da XX_1 er bestemt i Forvejen, giver 67 Krumningerne for alle plane Snit i Fladen [X] gjennem XX_1.

82. En plan Figur antages at bevæge sig frem i Rummet uden at forandre sin Projectivitetssammenhæng. Først ville vi lade 2 Punkter A og B ligge fast, saa at Planen drejer sig om AB, og 2 andre Punkter C og D beskrive rette Linier c og d. Man kan da bevise, at et vilkaarligt af Figurens Punkter E ogsaa beskriver en ret Linie. Betragtes nemlig 2 vilkaarlige Stillinger af Figuren, da ser man, at de to collineære Figurer ere saaledes beliggende, at Forbindelseslinierne mellem sammenhørende

---

*) Dette følger af den bekjendte Sætning: Naar en ret Linie bevæger sig saaledes, at et af dens Punkter M ligger fast, medens 2 andre N og P beskrive Planer, da vil ethvert Punkt paa Linien i fast projectiv Forbindelse med M, N og P gjennemløbe en Plan.

Punkter skære 2 faste Linier p og q. Disse gaa gjennem henholdsvis A og B og skære begge baade c og d. De ere altsaa éntydig bestemte ved det givne, og deraf ses Sætningens Rigtighed. Alle de beskrevne Punktrækker ere projective, og alle rette Linier i Planen beskrive Flader af 2. Orden gjennem (AB), p og q.

Vi ville dernæst antage, at ét Punkt A ligger fast, medens 4 andre Punkter B, C, D og E skulle ligge paa givne rette Linier b, c, d og e. Her er kun én Stilling af Figuren mulig, hvilket indses saaledes:

Lægges B fast, da faas, idet C og D gjennemløbe henholdsvis c og d, en Linie e som geometrisk Sted for E; denne construeres ved, at man drager p gjennem A og skærende c og d, q gjennem B og skærende c og d, og dernæst e gjennem E og skærende p og q. Lader man nu B gjennemløbe b, da ville de 4 Planer gjennem q og henholdsvis A, C, D og E danne en Gruppe med constant Projectivitetssammenhæng, og e skærer da p i et fast Punkt. Endvidere kunne Udgangsstillingerne for E vælges i Planen gjennem A og b, saa at de danne en Punktrække projectiv med den af B gjennemløbne Række (B). Naar altsaa B bevæger sig paa b, da vil e beskrive et Liniebundt projectivt med (B). Herved indses det da, at naar A ligger fast, og B, C, D og E skulle lægges ind hvert paa sin af 4 vilkaarlig givne Linier b, c, d og e saaledes, *at den plane Figur (ABCDE) beholder sin Projectivitétssammenhæng, da har Opgaven i Almindelighed kun 1 Løsning.* Constructionen er angiven i Beviset.

83. *Naar 5 Punkter af en plan Figur med constant Projectivitetssammenhæng beskrive hvert sin af 5 vilkaarlig opgivne Linier i Rummet, da ville alle Figurens Punkter beskrive rette Linier saaledes, at de gjennemløbne Punktrækker ere projective.*

At Bevægelsen er mulig og éntydig bestemt ved det givne, følger af den foregaaende Sætning (82).

De 5 givne Punkter A, B, C, D og E have Banerne hen-

holdsvis a, b, c, d og e. Vi ville først bevise, at de gjennemløbne Punktrækker ere projective.

Lægges A fast i Stillingen A_1, medens B, C og D skulle ligge paa henholdsvis b, c og d, da vil det geometriske Sted for E være en Plan ε_1 (i Følge 82). Lægger man dernæst A i A_2, da vil paa lignende Maade E være bundet til en anden Plan ε_2 o. s. v. Vi kunne nu indse, at naar A gjennemløber Rækken $A_1 A_2 A_3 \ldots$ paa a, da ville de tilsvarende Planer $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots$ danne et Bundt projectivt med $A_1 A_2 A_3 \ldots$ Lægges nemlig E fast i et vilkaarligt Punkt af Linien $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$, da vil Figuren (ABCDE) kunne lægges i 2 Stillinger saaledes, at A, B, C og D falde henholdsvis a, b, c og d i begge Tilfælde; men ved 82 ses da, at uendelig mange saadanne Stillinger ere mulige. Heraf følger da, at $\varepsilon_3 \varepsilon_4 \ldots$ maa gaa gjennem Linien $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$. At Planbundtet $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots$ er projectivt med Punktrækken $A_1 A_2 A_3 \ldots$, følger deraf, at man kan lade B ligge fast saaledes, at E og A beskrive projective Punktrækker (82). Skæringspunktrækken (E) mellem det omtalte Planbundt og Linien e maa da ogsaa være projectiv med $A_1 A_2 A_3 \ldots$, hvilket skulde bevises.

Ikke 3 af de beskrevne Punktrækker (A), (B), (C), (D) og (E), ville i Almindelighed kunne faa sammenhørende Punkter paa samme rette Linie, da dette vilde kræve, at det tilsvarende Punkt paa den fjerde Række ogsaa laa paa denne Linie, og saa maatte de 4 Baner have en speciel Stilling.

I det almindelige Tilfælde kan man vælge uendelig mange Punkter P saaledes, at der gaar 3 reelle Tangentplaner til den af Figurens Bærer indhyllede Flade af 3. Klasse igjennem P. Hele Bevægelsen vil altsaa for P som Øje afbildes paa en Plan som en projectiv lineær Bevægelse af en plan Figur i sin Plan, og alle Punkterne beskrive altsaa rette Linier. Dermed er den ovenfor opstillede Sætning fuldstændig bevist.

84. Har man nu 6 Punkter A, B, C, D, E og F af en plan Figur, der bevæger sig med constant Projectivitetssammenhæng saaledes, at A, B, C og D beskrive givne rette Linier

a, b, c og d, da vil i Følge 82 til enhver Stilling af E svare en bestemt Stilling af F og omvendt; lader man E beskrive en ret Linie e, da vil F beskrive en bestemt Linie f, og dersom E er bundet til en vis Plan ε, da vil F ligge i en dertil svarende Plan φ. Det sidste bevises paa samme Maade som Sætningerne i 80. Man faar altsaa følgende Sætning:

Naar en plan Figur med constant Projectivitetssammenhæng bevæger sig saaledes, at 4 af dens Punkter beskrive rette Linier, da ville alle dens Punkter gjennemløbe collineære Rumfigurer.

Hvis det imidlertid hænder, at 2 forskjellige Baner e_1 og e_2 for Punktet E svare til én og samme Bane f_1 for Punktet F, da vil F beskrive Linien f_1, naar blot E stadig befinder sig i Planen $[e_1 e_2]$. Enhver Linie, der forbinder et Punkt paa e_1 og et Punkt paa e_2 kan nemlig være Bane for E, idet F gjennemløber f_1. Vælges nu to vilkaarlige mulige Bevægelser, naar 4 Baner ere givne, da vil der i Almindelighed være 6 Punkter, der beskrive de samme Linier i begge Bevægelser,*) altsaa i Almindelighed 2 Punkter foruden de givne. Altsaa:

Naar 4 Punkter beskrive rette Linier, og et 5te Punkt er bundet til en bestemt Plan, da vil der være endnu 2 Punkter, der beskrive rette Linier.

85. Vi have set, at naar 4 Punkter af den betragtede plane Figur beskrive rette Linier, og et 5te Punkt gjennemløber en Plan, da ville alle Punkterne være bundne til bestemte Planer. Alle Baneplanerne ville indhylle en almindelig Flade af 3. Klasse, der ogsaa frembringes af Bæreren for den bevægede Figur. Man kan opstille flere lignende Sætninger, f. Ex.: Naar 3 Punkter beskrive rette Linier, og 3 andre skulle bevæge sig i givne Planer, da vil ethvert Punkt gjennemløbe en Plan, og alle Figurens Punkter beskrive collineære Figurer.

Alle disse Sætninger kunne udtales under ét saaledes:

---

*) Der gives nemlig i Almindelighed 6 rette Linier, der indeholde sammenhørende Punkter af 3 givne indbyrdes collineære plane Figurer.

Naar p Punkter bevæge sig paa givne rette Linier, og q andre Punkter ere bundne til givne Planer, da ville, saafremt

1) $2\,p + q = 9$, *alle andre Punkter beskrive Planer,*

2) $2\,p + q = 10$, *alle andre Punkter beskrive rette Linier; dersom endelig* 3) $2\,p + q = 11$, *da vil hele Figuren ligge fast og være éntydig bestemt.*

For $p = 5$ og $p = 4$ ere Sætningerne beviste; Beviserne føres paa tilsvarende Maade successivt for $p = 3, 2, 1, 0$. Alle Sætningerne kunne ogsaa siges at være indbefattede i den ene:

Naar 9 Punkter beskrive Planer, da er dette Tilfældet med alle Figurens Punkter.

Ved successiv Anvendelse af de opstillede Sætninger kan man nu løse den Opgave, *at construere et plant System af 11 Punkter, collineært med et givet, saaledes, at hvert af Punkterne falder i en bestemt opgiven Plan.*

Naar 9 Punkter af den bevægede Figur beskrive Planer, da ville alle Punkterne være bundne til bestemte Planer; dog vil der være 6 Punkter, der beskrive rette Linier, saa at Bevægelsen er den samme som den, man faar ved at lade 4 Punkter gjennemløbe rette Linier og lade et 5te Punkt være bundet til en Plan.

Ved Dualitetsprincipet faas nye Sætninger om Bevægelsen af *et Punkts Figur* (Knippe af Linier og Planer).

86. En plan Figurs infinitesimale projective Forskydning er bestemt, naar Fluxionen AA_1 for et Punkt A er given tillige med de Linier b, c, d og e, hvorpaa Fluxionerne for 4 andre Punkter B, C, D og E skulle ligge. Dette indsés ved 82, og Constructionen af de ubekjendte Fluxioner udføres paa følgende Maade: Man lægger den givne Figur i 2 nye Stillinger saaledes, at A, B, C, D og E falde paa Linierne AA_1, b, c, d og e. Dette udføres i Følge 82, og de af Figurens Punkter gjennemløbne projective Punktrækker ere da bestemte saaledes, at de sammenhørende Fluxioner kunne findes.

Dersom de 5 Punkter A, B, C, D og E beskrive givne

Curver henholdsvis (A), (B), (C), (D) og (E) med bekjendte Krumninger i de betragtede Punkter, da kan man finde Krumningscentret for et vilkaarligt Punkt X's Bane (X). Paa Tangenterne a, b, c, d og e til de givne Curver i de givne Punkter construeres først de sammenhørende Fluxioner AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 og EE_1, svarende til en vis infinitesimal Forskydning af den bevægede Figur. X faar derved Fluxionen XX_1. Tangenterne til Banecurverne i Punkterne A′, B′, C′, D′ og E′ kaldes henholdsvis a′, b′, c′, d′ og e′. Forskydningerne fra a til a′, fra b til b′ o. s. v kunne bestemmes i Følge 6.

Fra Curven (X) skal man nu finde Forskydningen fra Tangenten x i X til Tangenten x′ i X′. Man lægger da en Plan α, der skærer Linierne a, b, c, d, e og x i Punkterne henholdsvis M, N, P, Q, R og S saaledes, at Figuren (MNPQRS) er collineær med (ABCDEX). α underkastes derpaa en saadan infinitesimal Forskydning, at Fluxionspunkterne for M, N, P, Q og R falde paa de til disse Punkter svarende Fluxionslinier for henholdsvis a, b, c, d og e. M's Fluxion MM_1 kan vælges vilkaarlig, kun maa man sørge for, at M_1 falder paa a's Fluxionslinie med Hensyn til M. N_1, P_1, Q_1 og R_1 skulle bestemmes saaledes, at de falde paa de bekjendte Linier henholdsvis n, p, q og r. I Følge 82 har man følgende Sætning: Naar en plan Figur med constant Projectivitetssammenhæng faar en saadan infinitesimal Forskydning, at et Punkt M faar en given Fluxion MM_1, medens 3 andre Punkter skulle have deres Fluxionspunkter paa givne rette Linier, da vil ethvert Punkt i Figuren have sit Fluxionspunkt i en til Punktet éntydig svarende Plan.

Vælger man altsaa 3 saadanne Forskydninger, at M stadig har Fluxionen MM_1, medens N_1, P_1 og Q_1 falde paa henholdsvis n, p og q, da vil Planen gjennem de dertil svarende Fluxionspunkter for R være geometrisk Sted for R_1, og dens Skæringspunkt med r bliver da netop det søgte Fluxionspunkt R_1 for R.

Nu kan man ogsaa finde Fluxionen SS_1 for S, og man har

da tilstrækkeligt til i Følge 6 at finde Krumningscentret for Curven (X) i Punktet X.

87. Af de andre Krumningsproblemer, som staa i Forbindelse med Bevægelsen af en projectiv-uforanderlig plan Figur i Rummet, skulle vi endnu kun omtale følgende:

Naar 9 af Figurens Punkter beskrive Flader med givne Krumningsforhold, da vil et vilkaarligt Punkt i Figuren beskrive en Flade, hvis Krumning i det betragtede Punkt skal bestemmes.

De 9 Punkter antages at være A, B. C, D . . . I, og Tangentplanerne til de givne Flader i disse Punkter kaldes henholdsvis α, β, γ, . . . ι. Man lægger nu et plant System af 9 Punkter M, N, P, Q . . . V, collineært med det givne System (ABCD . . . I), saaledes, at M falder i α, N i β, P i γ o. s. v. Det vilkaarlig valgte Punkt X i den bevægelige Figur kommer derved i Stillingen Y. Giver man A Fluxionen AA_1 (paa AM), da faa B, C, D, . . . I og X Fluxioner, beliggende paa henholdsvis BN, CP, DQ . . . IV, XY, og som kunne findes i Følge 86. Den herved bestemte Forskydning af Figuren medfører bekjendte Forskydninger af Planerne α, β, γ, δ . . , ι; det gjælder om at finde den tilsvarende Forskydning af Tangentplanen ξ i Punktet X til den af dette Punkt beskrevne Flade. ξ selv bestemmes ved Anvendelse af de i 85 indeholdte Sætninger.

Man giver Systemet (MNPQ . . . V) en saadan infinitesimal Forskydning, at Projectivitetssammenhængen ikke forandres, og saaledes, at Fluxionspunkterne M_1, N_1, P_1, Q_1 . . . V_1 falde i de til Punkterne M, N, P, Q . . . . V svarende Fluxionsplaner for henholdsvis α, β, γ, δ . . . ι. Y vil da have sit Fluxionspunkt i en bestemt Plan. I Følge 85 har man nemlig Sætningen:

Naar en plan Figur med constant Projectivitetssammenhæng underkastes en saadan infinitesimal Forskydning, at 9 af dens Punkter have deres Fluxionspunkter i bestemte Planer, da vil ethvert Punkt have sit Fluxionspunkt i en bestemt Plan.

Den Plan, hvori Y_1 skal ligge, maa være parallel med ξ og

er altsaa bekjendt, naar en vilkaarlig af de for Y mulige Fluxioner er bestemt. For at finde en af disse Fluxioner vælger man MM_1 vilkaarlig saaledes, at M_1 falder i den til M svarende Fluxionsplan for α. Lægges foreløbig N_1 fast (i den tilsvarende Fluxionsplan for β), da kunne P_1, Q_1, R_1, S_1 og T_1 findes i Følge 82. U_1 og V_1 falde da i Stillinger, der i Almindelighed ikke ligge i de tilsvarende Fluxionsplaner for ϑ og ι. Lader man N_1 efterhaanden indtage 2 nye Stillinger (i den tilsvarende Fluxionsplan for β), da vil Planen gjennem de 3 fundne dertil svarende Fluxionspunkter for U skære ϑ's Fluxionsplan med Hensyn til U i en Linie u. Naar U_1 gjennemløber u, da vil V_1 beskrive en anden Linie, hvis Skæringspunkt med den til V svarende Fluxionsplan for ι er det søgte Fluxionspunkt for V. De andre Fluxionspunkter, altsaa ogsaa det til Y svarende Fluxionspunkt Y_1, kunne da bestemmes, og Planen gjennem Y_1 og parallel med ξ er dennes Fluxionsplan med Hensyn til Y. Ved Hjælp af 67 bestemmes derpaa Krumningen af en vilkaarlig Curve paa Fladen [X] og tangerende XX_1 i X, og Problemet er da løst.

88. Idet vi nu gaa over til Undersøgelsen af *projectiv-uforanderlige Rumfigurers Bevægelse*, skulle vi begynde med følgende Sætning:*)

Naar en Rumfigur bevæger sig med constant Projectivitets-sammenhæng saaledes, at 4 Punkter A, B, C og D ligge fast, og et 5te Punkt beskriver en ret Linie, da vil ethvert andet Figur-punkt ogsaa beskrive en ret Linie; alle de gjennemløbne Punkt-rækker ere projective og overskæres af hver af det faste Tetrae-ders Planer i sammenhørende Punkter.

Mere almindelig kan siges, at naar 4 Punkter A, B, C og D ligge fast, da ville 2 vilkaarlige Figurpunkter gjennemløbe col-lineære Rumfigurer med Fællespunkter i A, B, C og D.

---

*) Burmester: Kinematisch-geometrische Untersuchungen (Zeitschrift f. Math. u. Physik. 20. Jahrg. S. 397).

Naar A, B, C og D ligge fast, medens E gjennemløber Linierne e, da vil F gjennemløbe Linien f. Dette bevises derved, at Linien AF, BF, CF og DF maa gjennemløbe hver sit Liniebundt (25). Paa lignende Maade indsés det, at F vil gjennemløbe en Plan, naar E er bundet til en given Plan. Derved ere Sætningerne beviste.

Ved den *lineære Bevægelse* ɔ: den Bevægelse, hvor alle Banerne ere rette Linier, vil enhver af Figurens Linier beskrive en Flade af 2. Orden, der berører de 4 faste Planer; en vilkaarlig Plan vil indhylle en udfoldelig Flade af 3. Klasse, der ligeledes berører de 4 faste Planer. Alle Banelinierne danne tilsammen et tetraedralt Complex, i Følge *Reye's* Definition af dette. Enhver af Banelinierne vil skære sin consecutive Stilling og indhyller altsaa et Keglesnit, naar den deltager i Figurens Bevægelse. De Planer, der gaa gjennem et af de faste Punkter indhylle under Bevægelsen en Keglefladе af 2. Orden, og en Plan der gaar gjennem en af de faste Linier (det faste Tetraedets Kanter), vil dreje sig om denne.

Betragtes nu en uendelig lille Forskydning af Figuren, idet E faar en bestemt Fluxion EE_1, da kan man construere Fluxionen XX_1 for det vilkaarlige Punkt X ved at afbilde Figuren, først paa Planen [BCD] for Øjet A, og dernæst paa Planen [CDA] for Øjet B. I Følge 27 kan man da finde Fluxionerne for Billederne af X og derved selve Fluxionen XX_1. Man kan imidlertid ogsaa anvende følgende Sætning:

Banelinierne for alle Punkter i en Plan gjennem AB danne en lineær Congruens, hvis Bærere skære AB og CD og altsaa kunne findes, naar én af Banelinierne er given.

Sætningen faas ved at betragte den bevægede plane Figur i 2 Stillinger (82).

89. 6 Punkter af A, B, C, D, E og F antages givne paa vilkaarlig Maade i Rummet. Vi ville lægge dette Punktsystem saaledes, at det beholder sin Projectivitetssammenhæng, og saaledes, at A, B og C ikke flyttes, medens D, E og F skulle

ligge paa givne rette Linier, henholdsvis d, e og f. Opgaven har i Almindelighed kun 1 Løsning,

Vi beviste nemlig i 88, at naar A, B, C og D ligge fast, medens E beskriver en given Linie e, da vil F beskrive en derved bestemt Linie f_1.

Vælges nu D i en anden Stilling (paa d), da vil F faa en ny Banelinie f_2; idet A, B og C ligge fast, kan man flytte D paa d og E paa e, saaledes, at F stadig maa ligge i Planen $[f_1 f_2]$. F maa nemlig ligge paa Forbindelseslinien mellem et vilkaarligt Punkt paa f_1 og et vilkaarligt Punkt paa f_2.

Lade vi altsaa i den forelagte Figur A, B og C ligge fast, medens D og E beskrive henholdsvis d og e, da skal F stadig befinde sig i en bestemt Plan, der i Almindelighed skærer den givne Linie f i et bestemt Punkt, hvorved Figurens Beliggenhed er bestemt.

90. Idet vi nu gaa over til en Gruppe paa 6 Punkter, A, B, C, D, E og F, hvor A og B ligge fast, da indsés det, at C, D, E og F kunne bindes hvert til sin rette Linie, og Bevægelse er da mulig. Lægges nemlig C fast, faas i Følge 89 dertil svarende bestemte Stillinger for D, E og F. De af C, D, E og F beskrevne Punktrækker maa være projective. 2 forskjellige Stillinger af Figuren bestemme et tetraedralt Complex, hvorpaa der kan lægges ∞^1 Figurer collineære med den givne; disse maa da netop være de forskjellige Stillinger, som Figuren kan indtage under Bevægelsen. Vi faa da Sætningen:

Naar en Rumfigur bevæger sig med constant Projectivitetssammenhæng saaledes, at 2 Punkter ligge fast, og 4 andre Punkter beskrive rette Linier, da ville alle Figurens Punkter gjennemløbe rette Linier. Bevægelsen er en lineær Bevægelse (88), saa at der endnu findes 2 faste Punkter.

91. Ligger ét Punkt A fast, og 6 andre B, C, D, E, F og G skulle lægges ind, hvert paa sin rette Linie, da har Opgaven kun 1 Løsning. De 6 Linier, hvorpaa B, C, D, E, F og G skulle ligge, ere henholdsvis b, c, d, e, f og g. Lægges B

i en bestemt Stilling paa b, medens man lader C, D, E og F gjennemløbe deres tilsvarende Baner c, d, e og f, da vil G beskrive en ret Linie g_1. Flyttes B til en ny Stilling, faar G en ny Bane g_2, og man indser da:

Naar A ligger fast og B, C, D, E og F gjennemløbe givne rette Linier b, c, d, e, f, da vil G stadig ligge i en bestemt Plan $[g_1 g_2]$.

Denne Plan skærer nu den givne Linie g i et Punkt, der er identisk med den søgte Stilling af F. Derved er Figurens Beliggenhed éntydig bestemt.

92. *Naar 7 Punkter af en projectiv-uforanderlig Rumfigur beskrive rette Linier, da er Bevægelsen lineær.*

Lægges nemlig det ene Punkt i 2 forskjellige Stillinger, faas 2 dertil svarende Stillinger af den bevægede Figur (91). Disse bestemme et tetraedralt Complex, hvorpaa man kan lægge ∞^1 Figurer, collineære med den givne. Disse Figurer maa da netop være den bevægede Figurs forskjellige Stillinger, og Sætningen er da bevist.

Naar 6 Punkter beskrive rette Linier, og et 7de Punkt er bundet til en Plan, da vil ethvert andet Punkt ogsaa beskrive en Plan.

Denne Sætning bevises ved at betragte Figuren i 2 forskjellige Stillinger, hvorved man ser, at det geometriske Sted for et vilkaarligt, men bestemt Punkt faar den Egenskab, at det indeholder enhver ret Linie helt, naar det indeholder 2 af dens Punkter.

De to nu beviste Sætninger i Forbindelse med 91 føre til følgende Resultat:

Naar 6 Punkter af en projectiv-uforanderlig Rumfigur gjennemløbe rette Linier, da ville alle andre Punkter beskrive collineære Rumfigurer. Et Punkt og en Plan ville gjennemløbe cubisk-afhængige Figurer.

Paa lignende Maade som ved den tilsvarende Sætning i

Planen (38) gives der dog Punkter, som ikke gjennemløbe hele Rummet.

Der vil være uendelig mange Punkter, hvis Banelinier ere de samme i 2 vilkaarlige af de Bevægelser, der ere mulige, naar 6 Punkter have bestemte Baner. Disse Punkter ligge paa en Rumcurve af 6. Orden.

Derved faar man følgende Sætning:

Naar 6 Punkter have faste Banelinier, og et 7de Punkt er bundet til en Plan, da vil der være uendelig mange Punkter, beliggende paa en Rumcurve af 6. Orden, hvis Baner ere faste Linier. Alle andre Punkter i Rummet gjennemløbe collineære plane Figurer.

Vælger man 3 vilkaarlige af de mulige Bevægelser, da ville de Punkter hvis Banelinier ligge i samme Plan i alle 3 Bevægelser, stadig ligge i de derved bestemte Planer. Man faar da Sætningen:

Naar 6 Punkter af en projectiv-uforanderlig Rumfigur beskrive bestemte rette Linier, da vil der være uendelig mange Punkter beliggende paa en vis Flade af 4. Orden, der ere bundne til bestemte Planer.

Det geometriske Sted for de Punkter i den ene af 4 collineære Rumfigurer, der ligge i Plan med de tilsvarende Punkter i de 3 andre Figurer, er nemlig en Flade af 4. Orden.*)

93. Vi have i 92 sét, at en given Gruppe paa 7 Punkter kan, uden at dens Projectivitetssammenhæng forandres, lægges ind paa et givet System af 7 Linier paa ∞^1 Maader. Det omvendte, at flytte et System af 7 Linier, uden at forandre deres Projectivitetssammenhæng, saa at hver Linie kommer til at gaa gjennem et opgivet Punkt, maa da ogsaa kunne udføres paa ∞^1 Maader. Man kan altsaa ogsaa faa en projectiv Bevægelse i Rummet ved at lade 7 Linier dreje sig om faste Punkter; der vil da i Følge det foregaaende være ∞^3 Linier,

*) Fiedler: Die darstellende Geometrie, III. Theil, S. 634.

dannende et tetraedralt Complex, der gaa gjennem faste Punkter. Alle disse Linier ville frembringe Keglefladet af 2. Orden under Bevægelsen, og ethvert Punkt af den bevægede Rumfigur vil gjennemløbe en Rumcurve af 3. Orden gjennem Complexets Grundpunkter. Antage vi nemlig, at Linien a drejer sig om det faste Punkt A, da skal man for at finde den af a gjennemløbne Kegleflade opsøge de forskjellige Baner for A i den omvendte Bevægelse, idet A efterhaanden betragtes som hørende til alle Stillinger af den bevægede Figur. Man skal altsaa fra A drage alle Tangenterne til de Complexkeglesnit, der berøre a ɔ: alle de Complexlinier, der gaa gjennem A; men disse Complexlinier danne netop en Kegleflade af 2. Orden.

I den Bevægelse, hvor Complexlinierne dreje sig om faste Punkter, vil altsaa enhver af disse gjennemløbe en Complexkegleflade, og Complexets Grundtetraeder vil ligge fast under Bevægelsen. Der gives én og kun én Linie, der drejer sig om et givet Punkt, og enhver Plan i den bevægelige Figur vil dreje sig om en Complexlinie, saa at alle Figurens Planer ville dreje sig om faste Linier og beskrive projective Planbundter.

Paa ganske lignende Maade undersøges den dualistisk tilsvarende Bevægelse, hvor 7 givne Linier skulle bevæge sig i givne Planer.

Vi have altsaa følgende simple (lineære) Bevægelser af en Rumfigur med constant Projectivitetssammenhæng,

1⁰. *7 Punkter beskrive rette Linier; alle Punkter beskrive da projective Punktrækker, hvis Bærere danne et tetraedralt Complex, hvis Grundtetraeder ligger fast under Bevægelsen.*

2⁰. *7 Planer dreje sig om givne rette Linier; alle Planer beskrive da projective Planbundter, hvis Bærere danne et tetraedralt Complex. Dettes Grundtetraeder ligger fast under Bevægelsen.*

3⁰. *7 Linier dreje sig om faste Punkter; alle Linier hørende til et bestemt tetraedralt Complex beskrive da Keglefladet af 2. Orden. Den bevægelige Figurs Punkter beskrive Rumcurver af*

3. Orden, der ere omskrevne om Complexets Grundtetraeder, og alle Planer beskrive projective Planbundter. Bevægelsen er altsaa den samme som den under 2⁰ omtalte. Alle andre Linier end Complexlinierne beskrive altsaa Flader af 2. Orden.

4⁰. *7 Linier bevæge sig i faste Planer; alle Linier hørende til et bestemt tetraedralt Komplex beskrive da Keglesnit. Planerne i den bevægelige Figur indhylle udfoldelige Flader af 3. Klasse, og alle Punkter beskrive projective Punktrækker. Complexets Grundtetraeder ligger fast, og Bevægelsen er identisk med den i 1⁰ beskrevne.*

94. Angaaende den almindelige infinitesimale Forskydning af en projectiv-uforanderlig Rumfigur ville vi foreløbig løse følgende Opgave:

Bestem et vilkaarligt Punkts Fluxion, naar 5 Punkter have givne Fluxioner.

De 5 Punkter A, B, C, D og E have givne Fluxioner. Man skal finde den tilsvarende Fluxion for det vilkaarlige Punkt P. Først bestemmes Fluxionen for Skæringspunktet mellem Linierne DE og Planen [ABC] (61); dernæst lægges Planen [PDE], der skærer AB og BC i 2 Punkter, hvis Fluxioner kunne findes, da man kjender Fluxionerne for 4 Punkter i Planen [ABC] (se nedenfor). Derefter kjender man Fluxionerne for 4 Punkter i Planen [PDE] og kan altsaa bestemme Fluxionen for P.

Kjender man nemlig Fluxionerne MM_1, MN_1, DD_1 og EE_1 for 4 Punkter M, N, D og E i en bevægelig Plan α, da kan man finde Fluxionen for et andet af dennes Punkter P paa følgende Maade. Man projicerer M_1, N_1, D_1 og E_1 paa α i Punkterne M_2, N_2, D_2 og E_2 og betragter den Forskydning, der svarer til Fluxionerne MM_2, NN_2, DD_2 og EE_2. Dertil svarer en Fluxion PP_2 for P, der bestemmes i Følge 32.

P_2 maa da være Projectionen af P_1 paa α, og da P_1 tillige skal ligge i α's Fluxionsplan med Hensyn til P, er det fuldstændig bestemt.

Bestaar Opgaven deri, at bestemme Forskydningen af en

Rumfigur, naar 5 Planer have bekjendte ved Fluxioner fremstillede infinitesimale Forskydninger, da reduceres den ved 61 til det nylig behandlede Problem.

De Opgaver, vi her have løst, kunne ogsaa gives følgende Form:

At bestemme sammenhørende Punkter i en Pollineation i Rummet, idet 5 Punkter (Planer) ere givne tillige med deres tilsvarende Punkter (Planer) saaledes, at sammenhørende Punkter (Planer) falde uendelig tæt ved hinanden.

95. Naar en projectiv-uforanderlig Rumfigur bevæger sig saaledes, at 7 af dens Punkter beskrive Curver med bekjendte Krumningscentrer i de betragtede Punkter, da kan man bestemme Krumningen for et vilkaarligt Punkts Banecurve.

De 7 Punkter antages at være A, B, C, D, E, F og G, og X er et vilkaarlig valgt Punkt, hvis Banekrumning skal findes. Tangenterne til de tilsvarende Baner ere a, b, c, d, e, f, g og x. Idet man nu foreløbig lader a, b, c, d, e, f og g være Baner for A, B, C, D, E, F og G i en lineær Bevægelse, vil man faa x bestemt som Bane for X i denne Bevægelse. Man kan da lægge Figuren (ABCDEFG) i Stillingen (MNPQRST) saaledes, at M falder paa a, N paa b o. s. v. Ved denne Flytning antages X at komme i Y; XY er da identisk med x. Giver man A en vilkaarlig valgt Fluxion AA_1 (paa a), kan man finde Fluxionerne for de andre Punkter ved at bestemme de projective Punktrækker, som beskrives i den omtalte lineære Bevægelse. Man kan ogsaa gaa frem efter Methoden i 91.

Efter at have bestemt de sammenhørende Fluxioner for A, B, C, D, E, F, G og X, kan man finde de dertil svarende infinitesimale Forskydninger af Tangenterne a, b, c, d, e, f og g (6). Den nye Tangentgruppe (a′b′c′ . . . g′x′) skal kunne være Banegruppe for Figuren (ABCDEFGX) i en lineær Bevægelse. Altsaa skal man underkaste (MNPQRST) en saadan infinitesimal Forskydning, at Punkterne M, N, P, Q, R, S og

T faa deres Fluxionspunkter paa de tilsvarende Fluxionslinier for henholdsvis a, b, c, d, e, f og g. For at løse denne Opgave, der er et specielt Tilfælde af det i 91 behandlede Problem, anvende vi de i 88—92 fremstillede Sætninger paa følgende Form:

1°. *Naar 4 Punkters Fluxionspunkter ere givne, og et 5te Punkts Fluxionspunkt beskriver en ret Linie, da ville Fluxionspunkterne for alle Figurens Punkter beskrive rette Linier.*

2° *Naar 3 Punkter have givne Fluxioner, og 2 andre Punkters Fluxionspunkter skulle ligge paa givne rette Linier, da vil et vilkaarligt Punkts Fluxionspunkt være bundet til en bestemt Plan.*

3°. *Naar 3 Punkter have bekjendte Fluxioner, og 3 andre Punkters Fluxionspunkter skulle ligge paa givne rette Linier, da have alle Figurens Punkter bestemte Fluxioner.*

4°. *Naar 2 Punkter have givne Fluxioner, og 4 andre Punkters Fluxionspunkter ligge paa givne rette Linier, da vil ethvert Punkts Fluxionspunkt ligge paa en bestemt ret Linie.*

5°. *Naar 1 Punkts Fluxion er given, og Fluxionspunkterne for 5 andre Punkter skulle ligge paa givne rette Linier, da vil et vilkaarligt Punkt have sit Fluxionspunkt i en bestemt Plan.*

6°. *Naar 1 Punkt har en bekjendt Fluxion, og Fluxionspunkterne for 6 andre Punkter skulle ligge paa givne rette Linier, da vil ethvert Punkts Fluxion være éntydig bestemt.*

7°. *Naar 7 Punkter have deres Fluxionspunkter paa givne rette Linier, da vil ethvert Punkts Fluxionspunkt falde paa en bestemt ret Linie.*

Disse Sætninger om projectiv-uforanderlige Rumfigurers infinitesimale Forskydninger anvendes nu saaledes paa den foreliggende Opgave:

M_1 vælges vilkaarlig (paa den til M svarende Fluxionslinie for a); i Følge 6° kan man da finde de andre Fluxionspunkter. De bekjendte Linier, hvorpaa M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1, S_1 og T_1 skulle ligge, antages at være m, n, p, q, r, s og t. Man vælger

da, foruden det allerede valgte M_1, endnu N_1, P_1, Q_1 og R_1 (paa henholdsvis n, p, q og r) og lader de 4 Punkter M_1, N_1, P_1 og Q_1 ligge fast; naar R_1 gjennemløber r, vil S_1 gjennemløbe en Linie s_1, som findes i Følge 94. Vælges en ny Stilling for Q_1 (alt andet uforandret), da vil S faa et nyt Fluxionspunkt, og en Plan gjennem dette og s_1 skærer s i et Punkt S_1.

Holdes nu de valgte Punkter M_1, N_1 og P_1 samt det fundne S_1 fast, da bliver Q_1 og R_1 bestemte. Paa denne Maade faar man én Gruppe Fluxionspunkter $(M_1 N_1 P_1 Q_1 R_1 S_1)$ bestemt, og naar man har fundet 2 lignende Grupper, da ville de til de fundne 3 Fluxionssystemer svarende Fluxionspunkter for T bestemme en Plan (5^0), hvis Skæring med t giver det til Fluxionen MM_1 svarende Fluxionspunkt T_1 for T.

Holdes nu M_1 og T_1 fast, medens N_1, P_1, Q_1 og R_1 beskrive henholdsvis n, p, q og r, da vil S_1 beskrive en Linie (4^0), hvis Skæring med s giver det søgte Fluxionspunkt for S. Man gaar da videre paa samme Maade, og finder da ogsaa Fluxionen for Y. Denne Fluxion YY_1 vil da være fri Fluxion for Tangenten XY til den af X beskrevne Curve, og da tillige XX_1 er bekjendt, kan Krumningen for denne Curve bestemmes i Følge 6.

96. Vi have bevist følgende Sætning:

Naar 4 Punkter af en projectiv-uforanderlig Rumfigur ligge fast, medens et 5te Punkt gjennemløber en Plan, da vil ethvert Punkt P beskrive en bestemt Plan π saaledes, at Figurerne (P) og (π) have cubisk Forbindelse med hinanden.

Foruden denne Sætning om en saadan Bevægelse af en Rumfigur med constant Projectivitetssammenhæng, at Figuren kan indtage ∞^2 Stillinger i Rummet, kunne vi opstille følgende:

Naar 3 Punkter ligge fast, og 4 andre Punkter A, B, C og D gjennemløbe vilkaarlig givne Planer, henholdsvis α, β, γ *og* δ, *da vil ethvert andet Punkt E ogsaa være bundet til en bestemt Plan* ε.

Lægges A fast i Stillingen A_1 (i α), da vil C beskrive en

Plan γ_1, naar B gjennemløber β; γ_1 skærer γ i en Linie c. Lader man nu stadig A forblive i A_1, medens C gjennemløber c, da vil D gjennemløbe en Linie, der i Almindelighed har ét Punkt D_1 fælles med δ. Derved faar man den bevægelige Figur, hvis faste Punkter kaldes P, Q og R, i Stillingen $(PQRA_1B_1C_1D_1)$.

Vælges en ny Stilling A_2 for A, da kan man paa lignende Maade finde én dertil svarende Figurstilling $(PQRA_2B_2C_2D_2)$. De to Stillinger af E, der svare til A_1 og A_2, ere henholdsvis E_1 og E_2. Den givne Figur (PQRABCD) kan nu imidlertid bevæge sig saaledes uden at forandre Projectivitetssammenhæng, at P, Q og R ligge fast, medens A, B, C og D gjennemløbe henholdsvis A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 og D_1D_2; E vil ved denne Bevægelse beskrive Linien E_1E_2. Vi have altsaa bevist, at det geometriske Sted for E i den oprindelig givne Bevægelse har den Egenskab, at det indeholder enhver ret Linie helt, naar det indeholder 2 af dens Punkter. Det søgte Sted maa altsaa være en Plan, da E ikke kan falde i en vilkaarlig Stilling i Rummet.

Paa ganske lignende Maade beviser man følgende Sætninger om en projectiv-uforanderlig Rumfigurs Bevægelse:

Naar 2 Punkter ligge fast, og 7 andre Punkter beskrive Planer, da ville alle Punkter gjennemløbe collineære plane Figurer.

Naar 1 Punkt er fast, og 10 andre Punkter beskrive Planer, da beskrive alle Figurens Punkter bestemte Planer.

Naar 13 Punkter beskrive Planer, da er dette Tilfældet med alle Figurens Punkter, og de gjennemløbne Figurer ere collineære.

Af den sidste Sætning faas atter:

Naar 14 Punkter skulle ligge i bestemte Planer, da er Bevægelsen lineær.

Naar man skal construere en Gruppe paa 15 Punkter, collineær med en given saaledes, at hvert Punkt falder i sin bestemte Plan, da har Opgaven i Almindelighed kun én Løsning, der faas ved efterhaanden at anvende de opstillede Theoremer.

Her er samtidig bevist, at en cubisk Figurforbindelse i Rummet er éntydig bestemt ved 13 sammenhørende Elementpar.

Alle de opstillede Bevægelsessætninger om Figurer i Rummet kunne siges at være indeholdte i følgende:

Naar en projectiv-uforanderlig Rumfigur bevæger sig saaledes, at p Punkter ligge fast, q Punkter skulle ligge paa givne Linier, og r Punkter ere bundne til bestemte Planer, da ville, saafremt

1) $3p + 2q + r = 13$, *alle andre Punkter beskrive Planer,*

2) $3p + 2q + r = 14$, *alle Figurens Punkter beskrive rette Linier; er endelig*

3) $3p + 2q + r = 15$, *da vil Figuren kun have én Stilling.*

De heri indbefattede ikke tidligere beviste Sætninger kunne bevises paa ganske samme Maade som de i nærværende Artikel beviste.

De opstillede Sætninger gjælde i Almindelighed; for specielle Beliggenhedsforhold mellem de opgivne Figurelementer kan Bevægelsen blive ubestemt.

Saaledes vil der, naar $3p + 2q + r = 13$, være uendelig mange Punkter, beliggende paa en Rumcurve af 6. Orden, der kun gjennemløbe rette Linier. Disse Undersøgelser skulle vi dog forbigaa med den Bemærkning, at de kunne foretages ad rent geometrisk Vej paa en lignende Maade som de tilsvarende Undersøgelser angaaende en plan Figurs Bevægelse.

97. Det væsentligste af de Krumningsproblemer, der staa i Forbindelse med de i 96 foretagne Undersøgelser, er følgende:

Idet 13 Punkter af en projectiv-uforanderlig Rumfigur ere bundne til Flader med bekjendte Krumningsforhold, skal man finde Krumningen for den af et vilkaarligt Punkt gjennemløbne Flade.

De 13 givne Punkter antages at være A, B, C . . . M, og det Punkt, hvis Baneflades Krumning skal bestemmes, kaldes X. Ved at betragte den Bevægelse, hvor de givne Punkter beskrive de tilsvarende Banefladers Tangentplaner, finder man i

Følge 96 Tangentplanen ξ til X's Baneflade som Baneplan for X. Betragtes en vilkaarlig Figurstilling ($A'B'C' \ldots M'X'$) under denne Bevægelse, da kan man vælge Fluxionen AA_1 for A paa Linien AA', og derved ville Fluxionerne for B, C ... M, X falde paa Linierne henholdsvis BB', $CC' \ldots MM'$, XX', og kunne altsaa construeres. Bevægelsen af de givne Punkters øjeblikkelige Baneplaner (de givne Banefladers Tangentplaner) α, β, $\gamma \ldots \nu$ kan bestemmes ved de givne Krumninger (67).

Man søger derpaa en saadan infinitesimal Forskydning af Figuren ($A'B'C' \ldots M'X'$), at A', B', $C' \ldots M'$ faa deres Fluxionspunkter i de tilsvarende Fluxionsplaner for henholdsvis α, β, $\gamma \ldots \nu$. Dette udføres ved Sætningerne i 96, saaledes ændrede, at de blive analoge med de i 95 opstillede Theoremer.

Den til en saadan Forskydning svarende Fluxion for X' vil da være en fri Fluxion for Planen ξ med Hensyn til X', og Krumningen for X's Baneflade i Retningen XX_1 kan da findes i Følge 67.

Theses.

I.

Grænsen mellem den metriske og den rene Geometri er ikke skarp. Begreberne »Coincidens« og »Bevægelse« indeholde et primitivt Størrelsesbegreb.

II.

Naar en ret Linie i Almindelighed siges at indeholde ét og kun ét uendelig fjærnt Punkt, da bør dette forstaas saaledes: De uendelig fjærne Punkter paa Linien kunne opfattes som ét Punkt, saa længe det kun drejer sig om Operationer i det endelige Rum.

III.

I flere Lærebøger i Descriptivgeometri nævnes i Theorien om uforanderlige plane Figurers Bevægelse følgende Sætning: Det geometriske Sted for Krumningscentrerne til de uendelig fjærne Punkters Baner er i hvert Øjeblik en Cirkel.

Der er imidlertid ikke i Forvejen givet nogen Definition af Krumningscentret for et uendelig fjærnt Punkts Bane.

IV.

Naar en Curve er saaledes defineret, at det er muligt at construere den Punkt for Punkt ved Passer og Lineal, da kan man ogsaa alene ved disse Hjælpemidler construere Curvens Evolut, Evolutens Evolut o. s. v. Punkt for Punkt.

V.

Differentialregningen løser den Opgave, at bestemme den uendelig lille Tilvæxt af en Function $u = f(x, y, z \ldots)$, naar de

uafhængige variable x, y, z ... faa givne uendelig smaa Tilvæxter.

Den infinitesimale Descriptivgeometri løser den Opgave, at construere Fluxionen for et Punkt X, der er geometrisk bestemt ved flere andre Punkter A, B, C ..., naar disse faa givne Fluxioner.

VI.

Dersom 2 Punkter A og B svare til hinanden i en conform Afbildning, da kan Constructionen af B's Fluxion, naar A har en given Fluxion, opfattes som en geometrisk Differentiation af en monogen Function. De sammenhørende Fluxionspunkter for A og B ere sammenhørende Punkter i ligedannede Figurer.

VII.

De elementære Formler for Prismatoidens Volumen og Snitarealer kunne anvendes til Beregning af visse Voluminer og plane Arealer, der ellers vilde kræve en Integration.

VIII.

En Definition bør ikke opfattes som identisk med en Opstilling af en vilkaarlig nødvendig og tilstrækkelig Gruppe af Egenskaber ved det definerede Begreb.

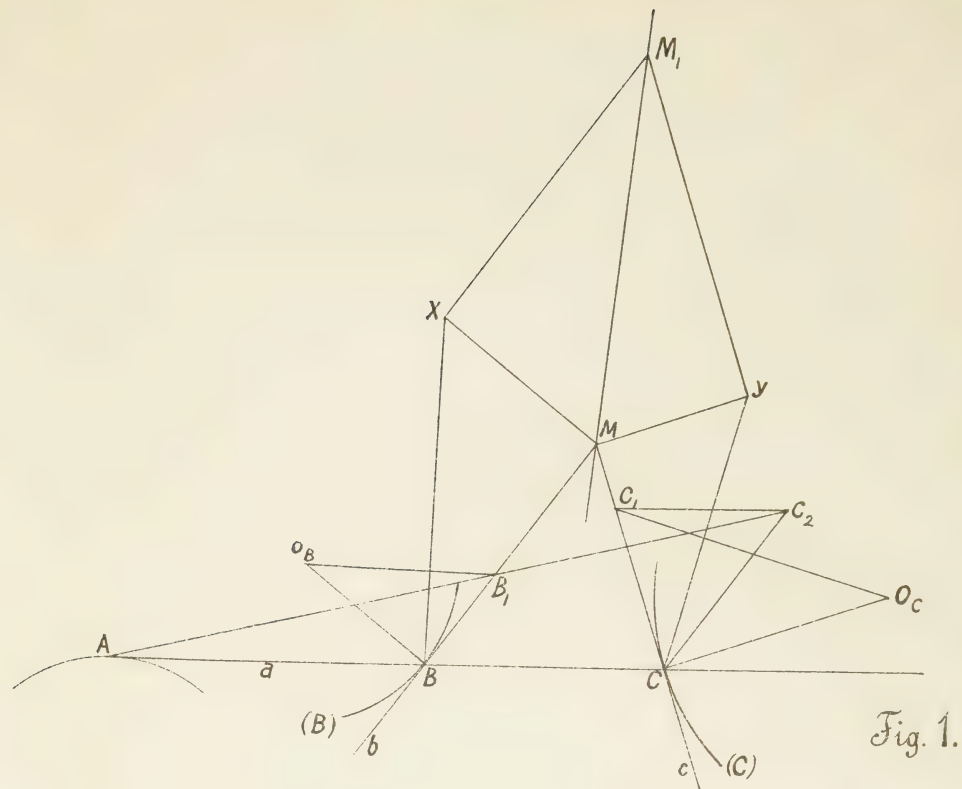


Fig. 1.

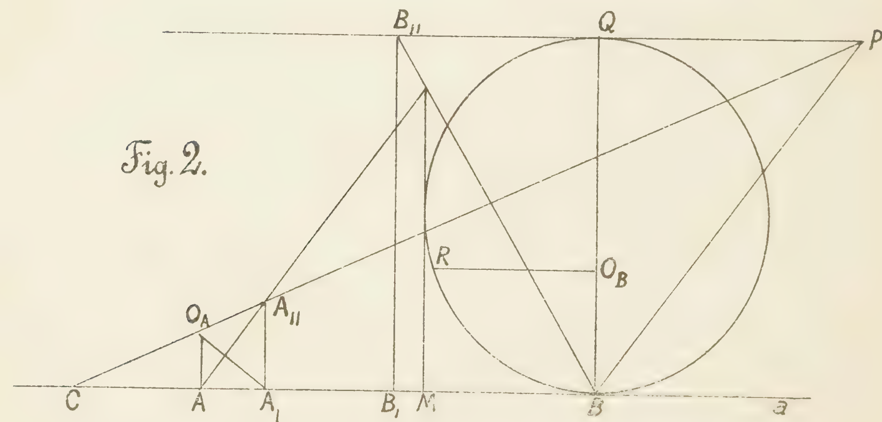


Fig. 2.

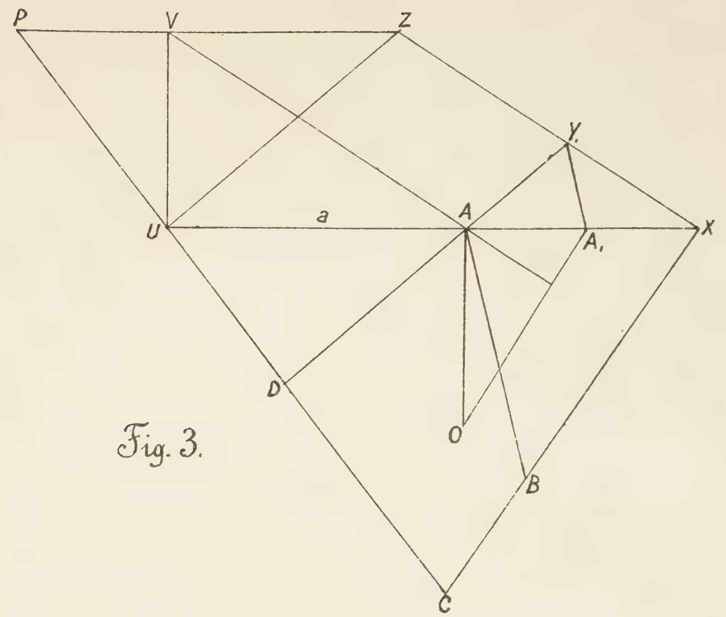


Fig. 3.

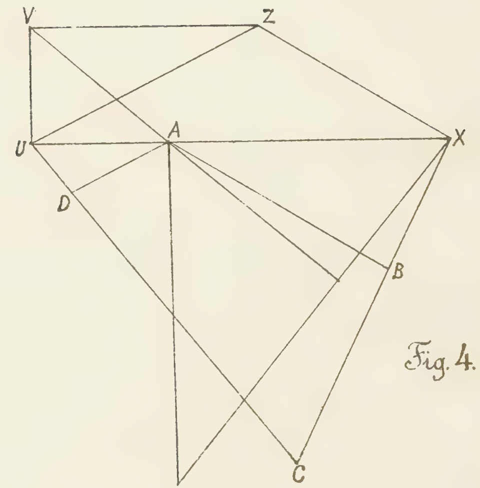


Fig. 4.

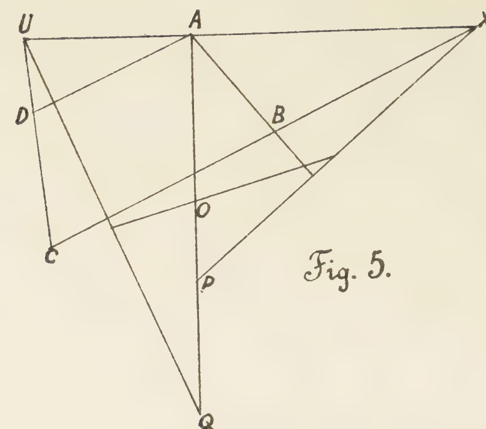


Fig. 5.

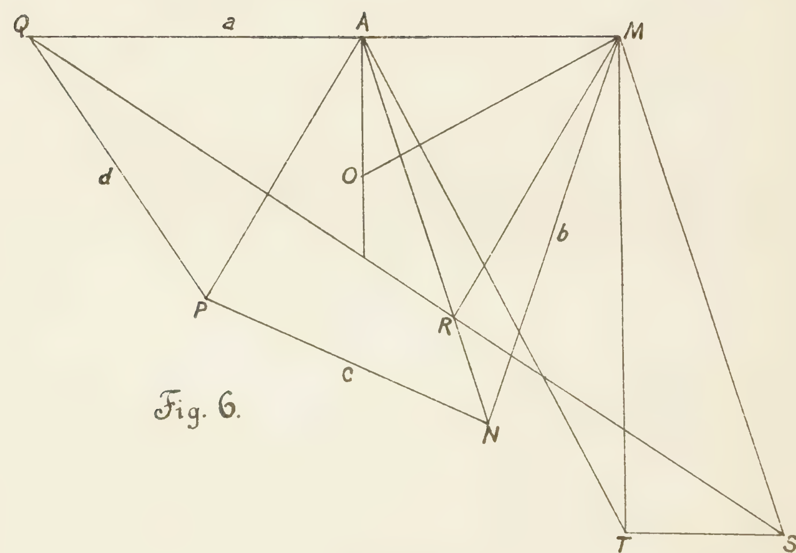


Fig. 6.

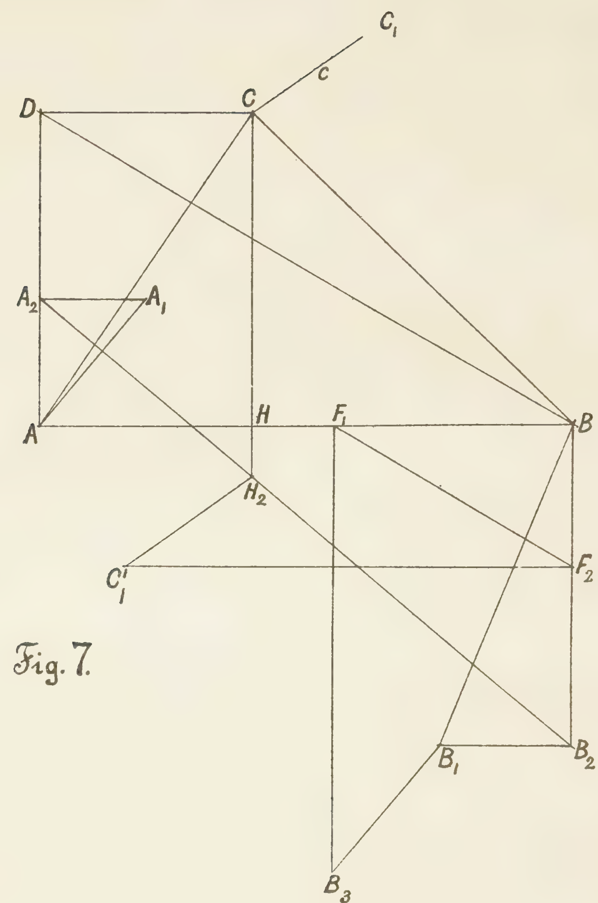


Fig. 7.

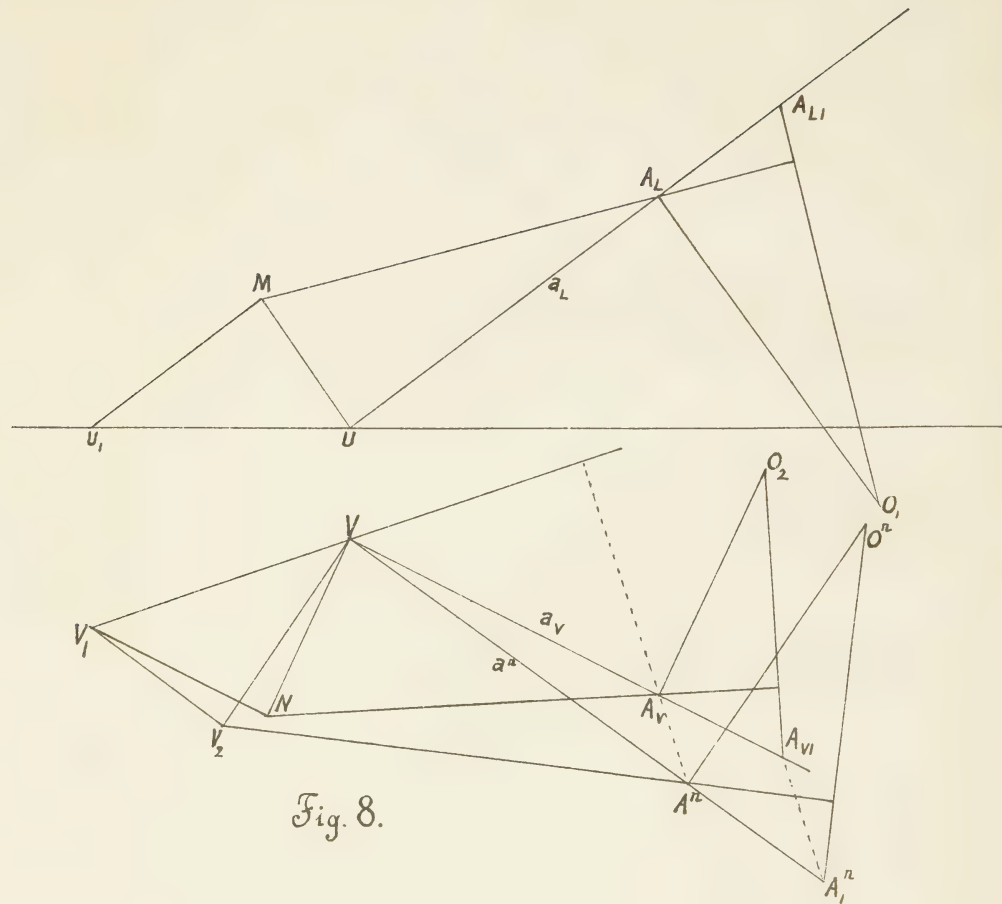


Fig. 8.

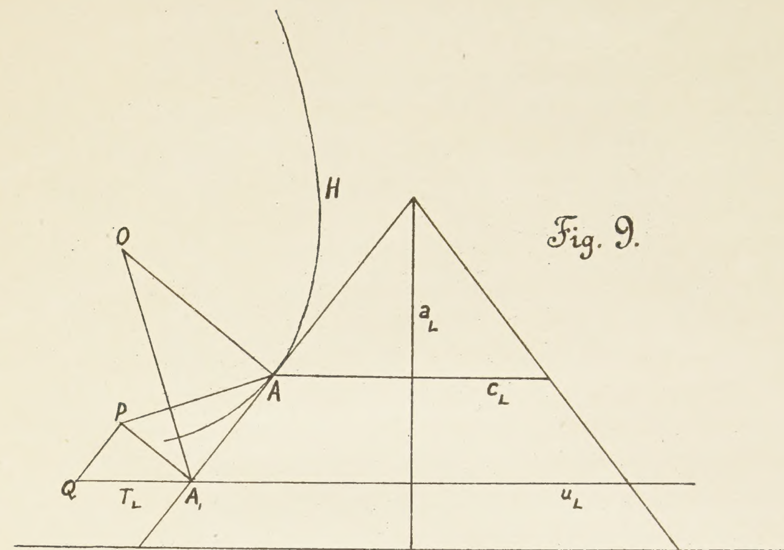


Fig. 9.

